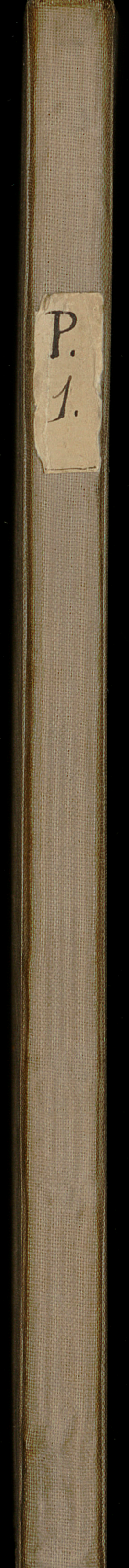

colorchecker CLASSIC
x·rite
mm


P.
1.

Calcul intégral

Cours de M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.

1er cahier. Louis Couturat

Cours de Calcul intégral
professé par M. Picard
à la Faculté des sciences
1891-1892.

II.



Table

Intégrales curvilignes.

Rappelons tout d'abord la définition de l'intégrale définie :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\left[f(a)(x_1-a) + f(x_1)(x_2-x_1) + \dots\dots + f(x_n)(b-x_n)\right]$$

$x_1, x_2, \dots\dots x_n$ étant des valeurs consécutives comprises entre a et b et partageant cet intervalle en $(n+1)$ intervalles qui tendent tous ensemble vers zéro pendant que leur nombre tend vers l'infini. On démontre que cette limite existe, et qu'elle est unique.

Quand on effectue le changement de variables : $x = \varphi(t)$, l'intégrale précédente devient :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

t_0 et t_1 étant tels, que quand t varie de t_0 à t_1, x varie de a à b.

On dit quelquefois que cette transformation n'est valable que si, t variant de t_0 à t_1, x varie d'une manière continue de a à b sans dépasser ces limites. Cela n'est pas nécessaire. La transformation est légitime tant que, pour toutes les valeurs que prend x quand t varie de t_0 à t_1 la fonction $f(x)$ est bien déterminée ; elle est la condition nécessaire et suffisante du changement de variables.

Si l'on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

on sait que la dérivée de $F(x)$ est $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

Si la fonction $f(x)$ est continue, l'intégrale de cette fonction : $F(x)$ est aussi continue, et elle a pour dérivée $f(x)$.

Si maintenant on trouve une fonction $\mathcal{F}(x)$ qui ait pour dérivée $f(x)$, elle ne peut différer de l'intégrale précédente que par une constante :

$$\int_a^x f(x)\,dx = \mathcal{F}(x) + C$$

Pour trouver la valeur de C, nous n'avons qu'à faire $x = a$; l'intégrale s'annule: $F(a) + C = 0$ d'où: $C = -F(a)$.

d'où la formule fondamentale $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

qui permet de calculer l'intégrale définie d'une fonction dont on connaît la fonction primitive.

<u>Remarque</u>. Nous avons supposé ci-dessus que $F(x)$ était une fonction bien déterminée. Si $F(x)$ avait des déterminations multiples, on ne pourrait plus calculer l'intégrale définie par la formule précédente, qui est indéterminée, à moins de conventions spéciales.

Par exemple, l'intégrale: $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$
est parfaitement déterminée.

Appliquons la formule précédente; nous trouvons pour sa valeur:

$$\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$$

valeur qui n'est déterminée qu'à un multiple près de π. Pour savoir quelle détermination l'on doit choisir pour la valeur de l'intégrale définie reportons-nous à la formule: $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$

En général, les déterminations multiples de $F(x)$ diffèrent entre elles de quantités finies. Si l'on en choisit une pour $F(a)$, on choisira pour $F(x)$ celle qui annulera l'intégrale pour $x = a$, c.à.d. la même détermination que pour $F(a)$. Quand x prend une valeur voisine de a, de toutes les déterminations de $F(x)$, on choisira celle qui est voisine de $F(a)$ déjà choisie ce qui se peut, puisque la fonction est continue. En procédant ainsi de proche en proche, on suivra par continuité la détermination choisie et on aura pour $F(x) - F(a)$ une valeur unique bien déterminée.

Par exemple, on prendra pour $\operatorname{arctg} a$ la valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si l'on suit par continuité la détermination précédente, on restera toujours dans le même intervalle; donc on devra prendre en général pour $\operatorname{arctg} x$, et en particulier pour $\operatorname{arctg} b$ la valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant l'intégrale analogue :

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a).$$

Il s'agit de déterminer d'une façon univoque le sens de arc tg x, de manière à n'avoir pour cette intégrale qu'une valeur unique et bien déterminée.

Nous supposons que $f(x)$ est une fonction rationnelle : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

P et Q étant des polynômes entiers en x.

$f(x)$ devient infinie ~~s'annule~~ pour les racines de $Q(x)$; mais l'élément différentiel ne ~~s'annule pas~~ devient pas infini car il est égal à :

$$\frac{P'Q - PQ'}{P^2+Q^2}$$

Considérons l'intégrale variable :

$$\int_a^x \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg} f(x) - \operatorname{arc\,tg} f(a)$$

Nous supposons que a n'est pas racine de $Q(x)$, c.à.d. ne rend pas $f(x)$ infinie. Nous partirons de la détermination $f(a)$ et nous la suivrons par continuité jusqu'à ce qu'elle passe par un infini : la valeur de l'intégrale restera bien déterminée dans cet intervalle. Soit α la 1e racine de $Q(x)$ que nous rencontrons : $Q(\alpha) = 0$, $F(a) = +\infty$.

Supposons qu'avant α $f(x)$ soit positive, et qu'après α elle soit négative : on dit que la fonction devient infinie en passant du positif au négatif.

Pour $x = \alpha - \varepsilon$, $f(x)$ est voisine de $+\infty$; arc tg $f(x)$ est voisin de $+\frac{\pi}{2}$. Pour $x = \alpha + \varepsilon$, $f(x)$ est voisine de $-\infty$; arctg $f(x)$, de $-\frac{\pi}{2}$.

Si l'on veut conserver à l'intégrale sa détermination primitive, il faudra suivre par continuité la fonction arctg x, et par suite prendre, pour $f(x)$ voisine de $-\infty$, l'arc voisin de $+\frac{\pi}{2}$, c.à.d. $+\frac{\pi}{2} + \eta$.

On sort donc de l'intervalle qu'on s'était assigné ; ~~si l'on~~ si l'on veut y rester on sera obligé de prendre la valeur négative $-\frac{\pi}{2} + \eta$, qui ~~diffère de~~ est inférieure à la précédente de π ; et si l'on veut conserver à la fois la détermination primitive de l'intégrale et le sens attribué à arctg $f(x)$, on devra écrire :

A

$$\int_a^{\alpha+\varepsilon} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg} f(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{arctg} f(a) + \pi$$

Si la fonction $f(x)$ passait du négatif au positif en devenant infinie l'arc passerait de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, c à d augmenterait brusquement de π; pour maintenir la continuité de l'intégral, il faudrait donc retrancher π au lieu de l'ajouter.

La formule ainsi corrigée pourra servir jusqu'à ce que la fonction $f(x)$ rencontre un nouvel infini β: on devra alors, pour conserver la continuité, ajouter au second membre $\pm\pi$; et ainsi de suite. Grâce à cette convention, $\operatorname{arctg} f(x)$ restera toujours dans l'intervalle $(+\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ et on aura pour la détermination univoque de l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a) + n\pi$$

n étant l'excès du nombre de fois que la fonction devient infinie en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'elle devient infinie en passant du négatif au positif dans l'intervalle (a, b).

Ce nombre n, Cauchy l'appelle indice de la fonction entre a et b. Il a donné en même temps une méthode pour le calculer. Il représente cet indice par le symbole $I f(x)$. On a donc l'égalité :

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a) + \pi I f(x)$$

Cherchons d'abord une relation entre $I f(x)$ et $I \frac{1}{f(x)}$. Faisons pour cela $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ dans la formule précédente :

$$-\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg}\frac{1}{f(b)} - \operatorname{arctg}\frac{1}{f(a)} + \pi I \frac{1}{f(x)}$$

L'intégrale n'a fait que changer de signe ; on a donc l'identité :

$$\pi\left[I f(x) + I\frac{1}{f(x)}\right] + \operatorname{arctg} f(b) + \operatorname{arctg}\frac{1}{f(b)} - \operatorname{arctg} f(a) - \operatorname{arctg}\frac{1}{f(a)} = 0.$$

Il peut se présenter ici différents cas pour les arctang.

Supposons d'abord que $f(a)$ et $f(b)$ soient de même signe: $f(a)f(b)>0$.
On a, par la trigonométrie:
$$\text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \end{cases}$$
Donc, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe les 2 sommes: $\left(\text{arctg}\, f(a) + \text{arctg}\, \frac{1}{f(a)}\right)$ et $\left(\text{arctg}\, f(b) + \text{arctg}\, \frac{1}{f(b)}\right)$ sont égales et se détruisent dans l'égalité précédente. Il reste:
$$I f(x) + I \frac{1}{f(x)} = 0$$
Si $f(b)>0$, $f(a)<0$, on a en même temps:
$$\text{arctg}\, f(b) + \text{arctg}\, \frac{1}{f(b)} = +\frac{\pi}{2} \qquad \text{arctg}\, f(a) + \text{arctg}\, \frac{1}{f(a)} = -\frac{\pi}{2}.$$
Donc: $$\pi\left[I f(x) + I \frac{1}{f(x)}\right] = -\pi \qquad I f(x) + I \frac{1}{f(x)} = -1.$$
Enfin, si $f(b)<0$, $f(a)>0$, on aura de même:
$$\text{arctg}\, f(b) + \text{arctg}\, \frac{1}{f(b)} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{arctg}\, f(a) + \text{arctg}\, \frac{1}{f(a)} = +\frac{\pi}{2}$$
D'où: $$\pi\left[I f(x) + I \frac{1}{f(x)}\right] = +\pi \qquad I f(x) + I \frac{1}{f(x)} = +1.$$
Telles sont les 3 relations possibles suivant les cas entre l'indice d'une fonction et celui de la fonction inverse dans le même intervalle.
Nous pouvons maintenant calculer l'indice d'une fonction rationnelle par une méthode analogue à celle de Sturm. Posons:
$$f(x) = \frac{V_1}{V}$$
V, V_1 étant des polynômes quelconques; on peut toujours supposer V_1 de degré inférieur à V: car autrement on extrairait de $f(x)$ une fonction entière dont l'indice serait nul; l'indice de $f(x)$ n'en serait donc pas changé.
Effectuons sur V, V_1 les opérations de Sturm, c.à.d. des divisions successives dans lesquelles on change le signe des restes:

$$V = V_1 Q_1 - V_2$$
$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$V_{n-2} = V_{n-1} Q_{n-1} - V_n$$
$$V_{n-1} = V_n Q_n$$

Le nombre de ces opérations est au plus égal au degré de V, et on trouve pour V_n une constante. Ces égalités peuvent s'écrire :

$$\frac{V}{V_1} = Q_1 - \frac{V_2}{V_1}$$
$$\frac{V_1}{V_2} = Q_2 - \frac{V_3}{V_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}} = Q_{n-1} - \frac{V_n}{V_{n-1}}$$
$$\frac{V_{n-1}}{V_n} = Q_n$$

D'où l'on conclut :

$$(I)\quad \begin{cases} I\dfrac{V}{V_1} + I\dfrac{V_2}{V_1} = 0 \\ I\dfrac{V_1}{V_2} + I\dfrac{V_3}{V_2} = 0 \\ \cdots\cdots \\ I\dfrac{V_{n-2}}{V_{n-1}} + I\dfrac{V_n}{V_{n-1}} = 0 \\ I\dfrac{V_{n-1}}{V_n} = 0 \end{cases}$$

car, comme nous venons de le dire, les entiers $Q_1\ Q_2 \ldots Q_n$ ont lieu d'être 0. D'autre part, on a, en vertu des remarques précédentes, les égalités suivantes :

$$I\frac{V_1}{V} + I\frac{V}{V_1} = \varepsilon_1$$
$$I\frac{V_2}{V_1} + I\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$I\frac{V_{n-1}}{V_{n-2}} + I\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}} = \varepsilon_{n-1}$$
$$I\frac{V_n}{V_{n-1}} + I\frac{V_{n-1}}{V_n} = \varepsilon_n$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ étant des quantités connues égales à 0, $+1$ ou -1, qu'on peut déterminer en substituant a et b à x dans $V V_1 V_2, \ldots V_n$. Si nous ajoutons toutes ces identités membre à membre, tous les termes intermédiaires disparaissent en se détruisant deux à deux en vertu des égalités (I) et comme dernier membre $I\frac{V_{n-1}}{V_n}$ est nul, il ne reste que $I\frac{V_1}{V}$ que nous cherchons:

$$I\frac{V_1}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n$$

Le second membre est parfaitement connu et déterminé. telle est la valeur de l'indice de $f(x)$.

Il suffit de supposer, dans les formules précédentes, que V_1 est la dérivée de V, pour avoir le théorème de Sturm, en remarquant que la fonction $\frac{V_1}{V}$ devient infinie en passant toujours du négatif au positif, quand V passe par une racine

On voit que pour passer de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie il faut observer certaines conditions et prendre certaines précautions.

— Différentiation sous le signe somme

Soit l'intégrale définie: $\int_a^b f(x,y)\,dx$

Dans $f(x,y)$ on laisse y constant et on intègre par rapport à x. On obtient ainsi une certaine fonction $F(y)$. On demande de calculer la dérivée de $F(y)$ par rapport à y. On va prouver qu'il suffit de différentier par rapport à y la fonction $f(x,y)$ soumise au signe somme

Donnons à y un accroissement fini Δy:

$$F(y+\Delta y) - F(y) = \int\left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]dx = \int \Delta y\, f'_y(x, y+\theta\Delta y)\,dx$$

$$\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \int f'_y(x, y+\theta\Delta y)\,dx$$ Faisons tendre Δy vers 0;

$$F'(y) = \int f'_y(x,y)\,dx.$$

Cette démonstration suppose que quelle que soit la valeur de x dans l'intervalle (a, b), $f'_y(x, y+\Delta y)$ est très voisine de $f'_y(x, y)$.

— La notion d'intégrale curviligne que nous allons maintenant définir, se ramène immédiatement à la notion de l'intégrale définie ordinaire. Considérons un plan avec 2 axes rectangulaires Ox, Oy, et une courbe allant du point A au point B ; soient a, a' les coordonnées du p. A, b, b' celles du point B.

L'intégrale curviligne : $\int P(x, y)\, dx$

prise le long de l'arc AB, est par définition la limite de la somme :

$$P(a, a')(x_1 - a) + P(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots\ldots + P(x_n, y_n)(b - x_n)$$

où $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ .... $(x_n y_n)$ sont les coordonnées des points successifs qui partagent l'arc AB en $(n+1)$ segments qui tendent tous ensemble vers zéro pendant que leur nombre tend vers l'infini. Cette somme est tout à fait analogue à celle par laquelle on définit l'intégrale définie : elle a aussi une limite unique, qui est la valeur de l'intégrale curviligne. Supposons que l'arc AB ne soit rencontré qu'en un point par une parallèle quelconque à Oy, c.à.d. qu'à chaque valeur de x ne corresponde qu'une seule valeur de y : y sera une fonction univoque de x : $y = \varphi(x)$ et P devient une fonction univoque de x : $P(x, \varphi(x))$

L'intégrale curviligne n'est autre chose que l'intégrale ordinaire :

$$\int_a^b P(x, \varphi(x))\, dx$$

prise le long de la projection de l'arc AB sur Ox.

Supposons maintenant que l'arc de courbe considéré AA' soit tangent en B à une parallèle à Oy ; pour prendre l'intégrale le long de cette courbe, on la prendra d'abord le long de l'arc AB :

$$\int_a^b P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, \varphi(x))\, dx$$

puis le long de l'arc BA', où y est une fonction de x différente de φ :

$$\int_b^{a'} P(x, \varphi_1(x))\,dx$$

On pourra toujours ramener ainsi une intégrale curviligne à une somme d'intégrales ordinaires.

Au lieu d'avoir y en fonction de x, on pourrait avoir x et y en fonction de t, paramètre variable; les points extrêmes A, B correspondant aux valeurs t_0 et t_1 de ce paramètre. On aura alors une fonction de l'unique variable t à intégrer dans l'intervalle (t_0, t_1); soit: $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$

L'intégrale curviligne devient: $\int_{t_0}^{t_1} P(\varphi, \psi)\,\varphi'(t)\,dt$.

Il est évident qu'on ~~peut~~ aussi ~~intégr~~ prendre une intégrale curviligne par rapport à la variable y: $\int_a^b Q(x,y)\,dy = \int_{t_0}^{t_1} Q(\varphi, \psi)\,\psi'(t)\,dt$

Considérons l'intégrale curviligne: $\int (P\,dx + Q\,dy)$

qui n'est que la somme des 2 précédentes, P et Q étant fonctions de x et de y. Nous supposons qu'on la prenne le long du segment de courbe AB qui va du point fixe $A(x_0\, y_0)$ au point variable $B(x, y)$. L'intégrale ainsi prise a un sens déterminé. Nous allons chercher quelle relation doit exister entre P et Q pour que la valeur de cette intégrale ne dépende que de (x, y) et non du chemin suivi, et cela quels que soient x, y, c.à.d. le point B.

Pour trouver la condition nécessaire, supposons que l'intégrale:

$$\int_{x_0 y_0}^{x y} (P\,dx + Q\,dy)$$

ne dépende pas du chemin suivi.

Menons par A et B des parallèles aux axes; nous déterminons ainsi le rectangle ACBD. Par hypothèse, l'intégrale prise le long de ACB doit être égale à l'intégrale prise le long de ADB.

Cette égalité s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx \qquad (1)$$

Comme elle doit avoir lieu quels que soient x, y, nous pouvons la différentier par rapport à x :

$$P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy = P(x,y) \qquad (2)$$

puis par rapport à y :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (3)$$

Telle est la condition nécessaire. Nous allons prouver qu'elle est suffisante.

En effet, supposons qu'elle soit vérifiée, et voyons si l'on peut en déduire l'égalité (2). Les 2 membres de celle-ci, ayant des dérivées, par rapport à y égales par hypothèse, ne peuvent différer que par une fonction de x seul : posons donc :

$$P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy = P(x,y) + \varphi(x)$$

Pour trouver la valeur de la constante $\varphi(x)$, faisons $y = y_0$; ~~il vient~~ l'intégrale prise de y_0 à y s'annule, et il reste : $\varphi(x) = 0$.

Donc la 2e égalité est vraie. Voyons si l'on peut en déduire la 1re. Les 2 membres de celle-ci ayant des dérivées égales par rapport à x, ne peuvent différer que par une fonction de y seulement ; nous pouvons écrire :

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \psi(y)$$

Pour déterminer la constante $\psi(y)$, faisons $x = x_0$; les intégrales en P s'annulent, les intégrales en Q deviennent égales, et il vient :

$$\psi(y) = 0$$

Ainsi l'identité : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ entraîne l'égalité (1) ce qui prouve que c'est bien la condition suffisante pour que l'intégrale prise suivant une courbe allant de A à B soit indépendante du chemin suivi.

Il en résulte qu'à cette même condition l'intégrale $\int P dx + Q dy$ prise le long du contour fermé ACBD est nulle, car on a symboliqt :

$$(AC) + (CB) = (AD) + (DB)$$

d'où l'on conclut, en changeant de signe les intégrales qui changent de sens :

$$(AC) + (CB) + (BD) + (DA) = 0.$$

Nous allons maintenant démontrer que l'intégrale $\int P dx + Q dy$ est nulle quand on la prend suivant un contour fermé quelconque.

Considérons un segment AB de ce contour fermé, tel qu'il ne soit rencontré qu'en un point par chaque parallèle à Oy. Menons un certain nombre de ces parallèles, elles divisent l'arc AB en autant de segments ; menons par les points de division des droites parallèles à Ox ; nous formons ainsi un contour en escalier ACDEFH..... B. La longueur de ce contour a pour limite l'arc de courbe AB, et l'intégrale prise le long de ce contour ~~a pour limite~~ est égale à l'intégrale prise suivant AB ; $\int P dx$ représente l'intégrale prise suivant AC, DE, FG.... et $\int Q dy$ représente l'intégrale prise le long de CD, EF, GH..... Donc, si la proposition précédente est vraie pour un contour rectangulaire, elle sera vraie pour un contour quelconque.

Considérons donc les 2 chemins rectangulaires ACDEB, AP C'D'B qui vont de A en B. Pour prouver que l'intégrale prise le long du 1er a la même valeur que prise le long du 2e, il suffira de la prendre suivant le contour ACMP, puis le contour MDNC', puis le contour NEBD', et d'écrire qu'elle est nulle pour chacun de ces rectangles ; en ajoutant ces égalités, on trouvera que le contour ACDEBD'C'PA

donne lieu à une intégrale nulle ce qui prouve que les valeurs de l'intégrale prise suivant ACDEB et suivant APC'D'B sont identiques; donc:

L'intégrale curviligne $\int P dx + Q dy$ prise suivant un contour quelconque allant de A en B est constante, à la condition: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Tous les raisonnements précédents supposent qu'à l'intérieur de l'aire circonscrite par les contours considérés P et Q sont des fonctions continues de x, y. Donc: si l'on a un contour simple fermé quelconque, à l'intérieur duquel P et Q soient des fonctions continues de x, y, l'intégrale curviligne prise le long de ce contour est nulle.

Définissons le sens que nous conviendrons de considérer comme positif sur un contour fermé. Dans le cas d'un contour simple on prendra pour sens positif de circulation sur ce contour le sens de Ox vers Oy; pour rendre évidente la signification de cette expression abrégée, il suffit de considérer un point intérieur à ce contour, par lequel on mènera 2 axes Px', Py' respectivement parallèles à Ox, Oy: le sens positif de rotation sera celui qui amènerait Px' à coïncider avec Py' en décrivant un angle droit. — Remarquons que cette définition fait dépendre le signe de la rotation de la position du contour relativement aux axes, et non de la position arbitraire d'un observateur par rapport au plan du tableau (les déterminations de droite et de gauche se trouvant interverties quand l'observateur passe d'un côté à l'autre de ce plan.)

Considérons maintenant une aire limitée par 2 contours simples, c.à.d. la portion de plan intérieure à C et extérieure à C'. Pour définir le sens positif de circulation sur ce double contour, il suffit de considérer un point P pris dans cette aire, et le sens positif de rotation en ce point sur un cercle de rayon variable qu'on amènera à être

tangent à chacun des 2 contours : le sens sur C, C' devra être le même que sur ce cercle aux points de contact. On voit que le sens positif de circulation sur C' par rapport à l'aire comprise entre C et C' est inverse du sens positif de C, ou du sens positif de C' par rapport à l'aire que ce contour enferme.

Moyennant cette définition, on peut généraliser le théorème précédent : L'intégrale $\int P dx + Q dy$, prise le long du contour d'une aire quelconque dans le sens positif, est nulle.

Considérons par exemple l'aire annulaire comprise entre C et C' ; joignons 2 ~~points~~ quelconques α, β des 2 contours par une ligne quelconque ; on forme ainsi un contour unique enfermant l'aire considérée ; le contour C' est d'ailleurs parcouru en sens inverse du contour C ; quant à $\alpha\beta$, ce segment est parcouru 2 fois en sens inverse, de sorte que les 2 intégrales prises suivant lui se détruisent. Donc l'intégrale prise le long du double contour C et C' est nulle, ce qui démontre le théorème pour l'aire annulaire considérée.

Il en résulte que l'intégrale prise le long de C' dans le sens positif par rapport à l'aire qu'elle enferme est égale à l'intégrale prise le long de C dans le même sens, à la condition que P et Q soient continus dans l'aire comprise entre ces 2 contours.

— En résumé, ~~les conditions~~ pour que la proposition précédente soit vraie il faut, outre la condition : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

que P et Q soient continus dans toute l'aire c.à.d. ne deviennent ni infinis ni indéterminés. L'intégrale curviligne est donc une certaine fonction de x et de y, et nous pouvons poser :

$$\int_{x_0 y_0}^{x y} P dx + Q dy = u(x, y)$$

Cherchons ses dérivées partielles par rapport aux variables x et y.

Donnons à x l'accroissement Δx :

$$u(x+\Delta x, y) = \int_{x_0 y_0}^{x+\Delta x, y} P dx + Q dy$$

La différence des 2 intégrales est :

$$u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int_{x_0 y_0}^{x+\Delta x, y} P dx = \Delta x \, P(x+\theta\Delta x ; y) \qquad 0 < \theta < 1.$$

puisque y reste constante. On a donc pour la dérivée partielle :

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y) \qquad \text{d'où :} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

On trouverait de même pour la dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

Ainsi l'intégrale $\int P dx + Q dy$ est une fonction de x et y qui a pour dérivées partielles P et Q.

— Examinons maintenant le cas où, la condition $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ étant satisfaite, l'intégrale n'est pas nulle le long d'un contour fermé.

Considérons par exemple : $\int \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \text{arctg} \frac{y}{x}$

où la condition d'intégrabilité est remplie. L'intégrale est nulle le long de tout contour fermé qui ne contient pas l'origine. Mais pour le point origine $(x=0, y=0)$ l'intégrale est indéterminée, car :

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Il est facile de trouver la valeur de l'intégrale prise le long d'un contour qui contient l'origine. Si l'on pose : $\theta = \text{arctg} \frac{y}{x}$, l'intégrale devient :

$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. Ainsi pour chaque tour complet fait autour de l'origine, l'intégrale curviligne augmente de 2π.

Faisons le changement de variables suivant : $\begin{cases} x = f(X, Y) \\ y = \varphi(X, Y) \end{cases}$

f et φ étant 2 fonctions continues en X et Y. L'intégrale devient :

$$\int \frac{f d\varphi - \varphi df}{f^2+\varphi^2} = \int \frac{f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}dX + \frac{\partial \varphi}{\partial Y}dY\right) - \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial Y}dY\right)}{f^2+\varphi^2}$$

Il est aisé de voir que la nouvelle intégration satisfait à la condition d'intégrabilité.

Dans le plan XOY, prenons cette intégrale suivant un contour fermé C dans le sens positif. Elle sera nulle si le contour C n'enferme aucun point pour lequel on ait à la fois : $f(X, Y) = 0$ $\varphi(X, Y) = 0$ c.à.d. aucune des racines communes à ces 2 équations : en effet, les fonctions P et Q sont continues dans ce cas. Il est donc à présumer que la valeur de l'intégrale prise le long du contour dépend du nombre des racines du système : $f=0$, $\varphi=0$, contenues dans ce contour.

– Supposons que le contour C enferme plusieurs racines simples $a, b, c \ldots$ de ce système. En supposant que ces racines sont simples, nous supposons que les 2 courbes $f=0$, $\varphi=0$ ne sont pas tangentes, c.à.d que

$$\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial \varphi}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial \varphi}{\partial X} \gtrless 0.$$

Décrivons un petit cercle autour de chacune des racines $a, b, c \ldots$. L'intégrale prise le long du contour multiple de l'aire comprise entre ces cercles et le contour extérieur C est nulle ; donc l'intégrale prise suivant C dans le sens positif est égale à la somme des intégrales prises le long des petits cercles dont chacun entoure une racine, dans le même sens.

Tout revient donc à étudier un contour, Γ par exemple, qui ne contient qu'une racine, la racine a par ex. représentée par le point A.

Pour calculer la valeur de l'intégrale prise le long de ce contour, revenons à la forme initiale de l'intégrale. Cherchons d'abord quel est le contour qui dans le plan xOy correspond au contour Γ en vertu de la transformation opérée. Nous pouvons toujours supposer que le point A est l'origine (par un

changement convenable de coordonnées) c.à d. que : $X=0 \quad Y=0$ en même temps que $x=0, \ y=0$ ou : $f(0,0)=0, \ \varphi(0,0)=0$.

Le point (X,Y) restant dans l'aire Γ au voisinage du p. A, le point (x,y) restera dans le voisinage de 0, de sorte qu'au contour Γ correspondra un contour γ. Or l'intégrale prise le long du contour γ qui entoure l'origine est égale à 2π, comme nous venons de le voir ; il est donc à présumer que telle est ~~aussi~~ la valeur de l'intégrale transformée prise le long du contour Γ. Nous savons seulement que quand le point (x,y) décrit γ, le point (X,Y) décrit Γ ; mais il reste à savoir si le sens de rotation est le même sur ces 2 contours.

Supposons, pour simplifier, que le contour Γ soit un petit cercle de centre A et de rayon ρ, d'ailleurs aussi petit qu'on veut. On peut développer x et y en fonction de X et Y par la formule de Taylor ; on aura les 2 séries :

$$x = AX + BY + \dots\dots \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X} & \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

$$y = CX + DY + \dots\dots$$

Puisque le déterminant fonctionnel n'est pas nul, on a : $AD - BC \gtrless 0$

c'est d'ailleurs la valeur du déterminant fonctionnel pour $X=0, \ Y=0$.

Introduisons maintenant les 2 angles Ω argument du point (X,Y) et ω argument du point (x,y), et évaluons x, y, X, Y en fonction de ces angles :

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\omega = \frac{C\cos\Omega + D\sin\Omega + \rho[\quad]}{A\cos\Omega + B\sin\Omega + \rho[\quad]}$$

ρ est facteur de termes infiniment petits, et peut devenir lui-même aussi petit qu'on veut. Pour savoir si les angles ω et Ω varient dans le même sens, prenons la différentielle de l'expression précédente :

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{(-C\sin\Omega + D\cos\Omega)(A\cos\Omega + B\sin\Omega) - (C\cos\Omega + D\sin\Omega)(-A\sin\Omega + B\cos\Omega) + \dots}{(A\cos\Omega + B\sin\Omega + \rho[\quad])^2} d\Omega$$

Le numérateur se réduit à : $AD - BC + \rho[\quad]$

ρ étant très petit, c'est $(AD - BC)$ qui donne son signe au rapport $\frac{d\omega}{d\Omega}$.
Donc si le déterminant fonctionnel de f, φ est positif les arguments ω et Ω varient dans le même sens ; s'il est négatif ils varient en sens inverse. Dans le 1er cas, l'intégrale prise le long de Γ a pour valeur $+2\pi$; dans le 2e, sa valeur est -2π.

Au lieu de l'intégrale précédente, on peut considérer l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{f d\varphi - \varphi df}{f^2 + \varphi^2}$$

qui prend la valeur $+1$ autour de toute racine du système $\begin{cases} f = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$ pour laquelle le déterminant fonctionnel est positif, et la valeur -1 pour toute racine pour laquelle ce déterminant est négatif. Donc :
L'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int \frac{f d\varphi - \varphi df}{f^2 + \varphi^2}$ prise le long d'un contour fermé est un nombre entier égal à la différence du nombre des racines du système $\begin{cases} f = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$ comprises dans ce contour et pour lesquelles le déterminant fonctionnel de ce système est positif et du nombre de racines pour lesquelles il est négatif.

L'intégrale précédente ne donne le nombre des racines comprises dans le contour suivi que dans le cas où le déterminant fonctionnel a le même signe pour toutes ces racines.

Appliquons ces conclusions à un cas particulier. Soit l'équation :

$$f(x) = 0 \qquad \text{où } f(x) \text{ est une fonction continue quand } x \text{ varie entre } a \text{ et } b.$$

Le théorème précédent permet d'exprimer par une intégrale curviligne le nombre des racines de cette équation comprises dans l'intervalle (a, b).
On suppose que $f(x)$ n'a que des racines simples dans cet intervalle.
Considérons les 2 équations : $f(x) = 0$, $\quad y f'(x) = 0$
Traçons dans un plan 2 axes Oxy ; marquons sur Ox les points A, B

d'abscisses a, b; portons sur l'axe Oy les longueurs $+\varepsilon, -\varepsilon$, et menons par les points ainsi marqués des parallèles respectivement aux axes Oy, Ox; nous formons ainsi le rectangle $ABCD$. Les racines du système des 2 équations comprises dans ce rectangle sont les racines de $f(x)$ comprises dans l'intervalle (a, b) car, on a par hypothèse:

$$f'(x) \gtrless 0$$

Donc on obtient toutes les racines du système en associant la valeur $y = 0$ aux racines de l'équation $f(x) = 0$. On pourra donc appliquer le théorème précédent pour trouver le nombre des racines de cette éq. de l'intervalle (a, b)

Calculons le déterminant fonctionnel:

$$\begin{vmatrix} f' & 0 \\ yf'' & f' \end{vmatrix} = f'^2.$$

Il est constamment positif; donc l'intégrale prise suivant le contour $ABCD$ donnera immédiatement le nombre des racines cherché. L'intégrale indéfinie prendra la forme

$$\int \frac{f d\varphi - \varphi df}{f^2 + \varphi^2} = \int \frac{f(yf''dx + f'dy) - yf'^2 dx}{f^2 + y^2 f'^2}$$

Prenons-la le long de AB;

$$-\int_a^b \frac{\varepsilon(ff'' - f'^2)dx}{f^2 + \varepsilon^2 f'^2}$$

Le long de CD; $+\int_b^a \frac{\varepsilon(ff'' - f'^2)\,dx}{f^2 + \varepsilon^2 f'^2}$

Ces 2 intégrales sont égales et s'ajoutent dans la somme.

Le long de BC: $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{f(b)\,f'(b)\,dy}{f^2(b) + y^2 f'^2(b)} = \text{arctg}\left[y \frac{f'(b)}{f(b)}\right] = 2\,\text{arctg}\left[\varepsilon \frac{f'(b)}{f(b)}\right]$

Le long de DA: $\int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{f(a)\,f'(a)\,dy}{f^2(a) + y^2 f'(a)} = \text{arctg}\left[y \frac{f'(a)}{f(a)}\right] = -2\,\text{arctg}\left[\varepsilon \frac{f'(a)}{f(a)}\right]$

Nous aurons donc pour le nombre des racines cherché l'expression :

$$N = -2\int_a^b \frac{\varepsilon(ff'' - f'^2)\,dx}{f^2 + \varepsilon^2 f'^2} + 2\,\mathrm{arctg}\left[\varepsilon\,\frac{f'(b)}{f(b)}\right] - 2\,\mathrm{arctg}\left[\varepsilon\,\frac{f'(a)}{f(a)}\right]$$

N ne dépend évidemment pas de ε, qui est arbitraire. On est tenté, pour simplifier l'intégrale, de faire ε = 0. Les deux derniers termes (arctang) s'annulent ; l'intégrale qui forme le 1er terme semble aussi s'annuler : mais pour certains segments infiniment petits de l'intervalle (ab) ceux précisément qui contiennent les racines de f = 0, l'élément différentiel n'est pas nul, mais indéterminé (f^2 devenant nul au dénominateur). Ce sont ces éléments qui empêchent que l'intégrale ne s'annule avec ε. D'ailleurs, il est aisé de voir que l'élément différentiel est la différentielle de : $\mathrm{arctg}\left[\varepsilon\,\frac{f'}{f}\right]$ Donc l'intégrale indéfinie est :

$$-2\,\mathrm{arctg}\left[\varepsilon\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Il n'y a donc aucun avantage pratique à employer cette méthode pour déterminer le nombre des racines d'une équation dans un intervalle donné, puisqu'on est ramené à la recherche de l'indice de la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$ qui n'est autre que ce nombre. L'intérêt qu'offre cette expression est donc tout théorique ; et de plus, elle fournit le moyen de calculer la valeur de l'intégrale en question, puisqu'on sait que c'est un nombre entier, et qu'il suffit alors d'en obtenir une valeur approchée à moins de $\frac{1}{2}$ près.

— Considérons encore l'intégrale curviligne $\int P\,dx + Q\,dy$ prise le long d'un arc de courbe ayant un sens déterminé à partir d'un point pris pour origine. En un point M quelconque menons la tangente dans le sens des arcs croissants ; soient α_1, β_1 les angles qu'elle fait avec les 2 axes Ox, Oy ; on a : $\cos\alpha_1 = \frac{dx}{ds}$ $\cos\beta_1 = \frac{dy}{ds}$

Les angles α_1, β_1 sont comptés positivement, le 1er de Ox vers Oy, le 2e de Oy vers Ox. On peut toujours supposer : $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$

car il suffit pour cela de prendre des valeurs appropriées des 2 angles.

Considérons maintenant les angles de la normale avec les axes, α, β. Prenons, pour déterminer le sens de la normale, $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$.

On devra avoir, en vertu de l'hypothèse précédente : $\beta = \beta_1 - \frac{\pi}{2}$.

On en conclut :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \cos\beta$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\beta = -\cos\alpha. \qquad \begin{cases} dx = \cos\beta \, ds \\ dy = -\cos\alpha \, ds \end{cases}$$

Telles sont les formules qui expriment dx, dy en fonction de α, β ; ds étant une quantité essentiellement positive.

L'intégrale curviligne considérée devient :

$$\int (P\cos\beta - Q\cos\alpha)\, ds$$

L'élément différentiel est en ds.

On a à intégrer le long d'un certain arc. Soit par exemple une courbe fermée, sur laquelle on devra prendre l'intégrale dans le sens positif. On voit que les angles α, β définissent la direction de la normale dirigée à l'intérieur de la courbe ; dans une aire à plusieurs contours, la normale ainsi définie est toujours dirigée vers l'intérieur de l'aire.

Nous allons définir une notation assez usitée pour représenter la dérivée d'une fonction suivant une certaine direction.

Soit la fonction à 2 variables : $V(x, y)$

Soit A le point (x, y), et une demi-droite An issue du point A ; soit le point A' (x', y') pris à volonté sur cette demi-droite, et V' la valeur de V pour ce point : $V(x', y')$

La limite du rapport : $\dfrac{V-V'}{AA'}$ pour $AA'=0$,
sera par définition la dérivée de la fonction V dans la direction An,
et on la représentera par le symbole : $\dfrac{dV}{dn}$
Nous allons calculer sa valeur.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy \qquad \frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn}$$

dn étant la différentielle du segment de droite AA', on aura en vertu des notations précédentes : $\dfrac{dx}{dn} = \cos\alpha$ $\quad \dfrac{dy}{dn} = \cos\beta$

α et β étant les angles de la direction An avec les axes Ox, Oy —

Donc : $$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta$$

~~Revenons à~~ Considérons l'intégrale curviligne : $\displaystyle\int \frac{\partial V}{\partial y}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dy$
où V est une fonction de (x, y) ;
prenons pour direction An celle de la normale ; soient α, β les angles qu'elle fait avec les axes Ox, Oy ; on aura en vertu des formules ci-dessus trouvées :

$$\int \frac{\partial V}{\partial y}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dy = \int\left(\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha\right)ds = \int \frac{dV}{dn}ds$$

$\dfrac{dV}{dn}$ étant, selon la définition précédente, la dérivée de la fonction V suivant la direction de la normale vers l'intérieur de l'aire considérée.

— On présente souvent la théorie des intégrales curvilignes en la rattachant à la considération de l'intégrale double.

Rappelons la définition de l'intégrale double. Soit une fonction $f(x, y)$; chaque système de valeurs de x, y pouvant se représenter par un point sur un plan. Supposons qu'il s'agisse de l'intégrer pour l'ensemble des valeurs de (x, y) représenté par une ~~aire~~ portion du plan limitée par une courbe fermée.

Partageons l'aire en petits rectangles au moyen de parallèles aux axes. Considérons un de ces rectangles ayant pour sommet le point $M(x, y)$ et pour côtés, à partir de ce sommet, les accroissements Δx, Δy essentiellement positifs. Pour les rectangles traversés par la courbe, on prendra tous ceux dont le sommet ainsi défini est à l'intérieur de la courbe. On fait la somme double de tous ces rectangles, on les fait tendre tous ensemble vers 0, et leur nombre vers l'infini; on démontre que la somme double a pour limite l'intégrale double:

$$\lim \sum\sum f(x, y)\, \Delta x \Delta y = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

On va ramener à présent cette intégrale double à une intégrale simple. Considérons d'abord comment on peut former l'intégrale double en question. On supposera d'abord x et dx constants, et on formera la somme des rectangles de la colonne ainsi déterminée, c.à.d. on intégrera par rapport à y:

$$dx \int f(x, y)\, dy$$

c'est une intégrale définie ordinaire; x, étant fixe, détermine 2 valeurs correspondantes de y, soient y_1 et y_2: ce sont les limites de l'intégrale simple. Puis on fera la somme de toutes les tranches dx, c.à.d. qu'on intégrera la fonction précédente par rapport à x, entre les limites a et A, abscisses extrêmes de la courbe fermée; l'intégrale double sera donc obtenue par les calculs que résume la formule

$$\int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

On admettra, mais on peut prouver, que la limite de la somme double est la même quelle que soit la loi par laquelle les rectangles élémentaires tendent vers zéro. Donc l'intégrale double est bien déterminée, et les opérations précédentes fournissent sa valeur unique.

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale double $\iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$ prise à l'intérieur d'une aire peut s'exprimer par une intégrale simple prise suivant le contour de cette aire: $\int_c P\, dx$ -

En effet, effectuons les opérations précédentes:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y_2) - P(x, y_1) \qquad \int_a^A \left[P(x, y_2) - P(x, y_1)\right] dx = \iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$

Or, si nous considérons l'intégrale: $\int_c P\, dx$

prise le long du ~~contour~~ fermé de l'aire, nous voyons qu'à chaque valeur de l'abscisse x correspondent 2 valeurs de y, y_1 et y_2, et par suite 2 éléments de l'intégrale, où dx est pris d'ailleurs en sens contraire.

on a donc bien: $$\int_c P(x, y)\, dx = \int_a^A \left[P(x, y_1) - P(x_2, y_2)\right] dx = -\iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$

C'est bien une intégrale équivalente à l'intégrale proposée, au signe près.

On démontrerait de même l'identité: $\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int Q\, dy$

En ajoutant membre à membre, on a:

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = -\int_c P\, dx + Q\, dy$$

identité fondamentale qui sert à réduire une intégrale double à une intégrale curviligne.

Cette formule permet de retrouver à quelle condition l'intégrale curviligne peut être nulle. On voit immédiatement que cette condition est: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Ainsi, pour qu'une intégrale curviligne de la forme: $\int P\, dx + Q\, dy$ soit nulle le long d'un contour fermé, il faut et il suffit que: $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ soit nulle à l'intérieur de ce contour.

<u>Application</u>: Considérons, comme cas particulier, une aire quelconque limitée par un contour. La valeur de cette aire pourra s'exprimer par une intégrale

curviligne. En effet, cette aire a pour mesure l'intégrale double $\iint dx\,dy$

Nous prenons ici $P = y$, $Q = -x$ — On aura par la formule précédente :

$$2\iint dx\,dy = \int_C x\,dy - y\,dx$$

Donc l'aire aura pour expression :

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

l'intégrale étant prise suivant le contour dans le sens positif.

Dans le cas particulier d'un triangle, l'intégrale curviligne prise suivant les 3 côtés (de $x_1 y_1$ à $x_2 y_2$, de $x_2 y_2$ à $x_3 y_3$, et de $x_3 y_3$ à $x_1 y_1$) doit être égale, au signe près, au déterminant qui exprime l'aire triangulaire :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Fonctions analytiques d'une variable complexe

Une fonction analytique d'une variable complexe équivaut au fond à 2 fonctions P et Q de 2 variables réelles x, y, satisfaisant à une équation différentielle. Peut-être vaudrait-il mieux, dans l'étude de 2 fonctions simultanées, s'affranchir de tout symbolisme. Nous adopterons pourtant, pour nous conformer à l'ordre historique, la notation employée par Cauchy, qui a posé les fondements de l'étude que nous abordons.

Nous réunirons donc les 2 fonctions P et Q par le symbole agglutinatif i ; et de même x et y. Nous aurons ainsi une quantité complexe

$P + iQ$ que nous pourrons appeler fonction de la quantité complexe : $x + iy$ attendu que si l'on donne un système de valeurs pour x et y, les fonctions réelles P et Q sont déterminées.

— Cherchons à quelles conditions la fonction complexe : $P + iQ$ doit satisfaire pour avoir une dérivée ; nous entendons une dérivée unique indépendante de la façon dont le point $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ se rapproche du point (x, y). Il est clair en effet que le point mobile peut tendre vers le point fixe par une infinité de chemins différents, et qu'à chaque direction au point (x, y) puisse correspondre une valeur différente du quotient.

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{(\Delta x, \Delta y)}$$

Il n'y pas alors à proprement parler de dérivée (ou il y en a une infinité).

Développons le quotient dont la limite, si elle est unique, doit nous donner la dérivée, en nous servant du symbolisme imaginaire :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} + m\frac{\partial P}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + m\frac{\partial Q}{\partial y}\right)}{1 + im}$$

en posant : $\frac{dy}{dx} = m$; c'est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec Ox la direction suivant laquelle le p. $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ tend vers (x, y)

On voit que la valeur de cette fraction dépend de m à moins que les coefficients de m ne soient proportionnels :

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i} \quad \text{ou:} \quad \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

Cette égalité complexe équivaut aux 2 égalités réelles :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

Telles sont les conditions auxquelles la fonction complexe $(P+iQ)$ admet une dérivée ; c'est un système de 2 équations différentielles que doivent vérifier les fonctions P et Q.

On ne considérera plus désormais que les fonctions complexes qui satisfont à ces conditions. C'est seulement quand elle admettra une dérivée que nous considérerons la quantité : $P+iQ$ comme une fonction de la quantité complexe : $x+iy$.

Nous désignerons cette espèce de fonction, dans le sens restrictif que nous venons de définir, par le nom de fonction analytique ; c'est ce que Cauchy avait appelé fonction monogène (= qui engendre une seule dérivée)

– En posant : $x+iy=z$ et $P+iQ=f(z)$

on aura la valeur de la dérivée en donnant à m, dans le quotient considéré, une valeur arbitraire, 0 par exemple :

$$f'(z) = \lim \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Telles sont les 2 expressions principales de la dérivée de la fonction $f(z)$.

– Définissons maintenant ce que l'on entend par l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un contour. On divisera ce contour en petits segments élémentaires de projections dx, dy, et on prendra pour $f(z)$ la valeur qu'elle prend sur chacun de ces éléments : $\int_c f(z)\,dz = \int_c (P+iQ)(dx+idy) = \int_c P\,dx - Q\,dy + i\int P\,dy + Q\,dx$

Ainsi l'intégrale complexe : $\int_c f(z)\,dz$

prise le long d'un contour, revient à l'ensemble de 2 intégrales curvilignes prises le long de ce même contour.

— Théorème de Cauchy :

L'intégrale : $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un contour fermé, est nulle, si la fonction $f(z)$ est continue dans l'aire limitée par ce contour. Pour que l'intégrale complexe soit nulle, il faut et il suffit que les 2 éléments réels qui la composent soient nuls. Pour que l'intégrale curviligne : $\int P\,dx - Q\,dy$ soit nulle, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Pour que l'intégrale curviligne : $\int P\,dy + Q\,dx$ soit nulle, il faut et il suffit que l'on ait : $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$. Donc pour que l'intégrale $\int_c f(z)\,dz$ soit nulle, il faut et il suffit que $f(z)$ satisfasse les 2 conditions :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Or ces 2 conditions sont satisfaites par hypothèse, puisque la fonction $f(z)$ est supposée analytique ; le théorème est donc démontré.

Il est évident que la fonction $f(z)$ est continue à l'intérieur du contour ~~si les fonctions réelles P et Q le sont, et réciproquement~~ puisque les 2 conditions précédentes expriment que c'est une fonction analytique, c à d continue et admettant une dérivée.

La fonction complexe : $f(z)$ peut aussi s'intégrer entre 2 points que joint un arc de courbe quelconque : $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

pourvu qu'elle soit continue dans une aire qui contient les 2 points et la courbe qui les joint ; en effet, si les conditions précédentes sont vérifiées, l'intégrale curviligne prise de z_0 à z sera indépendante du chemin parcouru

On peut d'ailleurs le vérifier en cherchant si la somme d'intégrales curvilignes :

$$\int P dx - Q dy + i \int P dy + Q dx$$

admet une dérivée. Or la dérivée par rapport à x est : $P + iQ$;
la dérivée par rapport à y est : $iP - Q = i(P + iQ)$

Donc : $dF = (P + iQ) dx + i (P + iQ) dy = (P + iQ)(dx + i dy)$ $\frac{dF}{dz} = P + iQ = f$.

On voit que la dérivée de $\int f(z) dz$ est bien $f(z)$.

Ces propositions fondamentales établies, toutes les règles et les théorèmes relatifs à la différentiation et à l'intégration s'étendent aux fonctions analytiques d'une variable complexe.

Une fois définie, sous certaines conditions que nous venons de trouver, l'existence des fonctions complexes, on peut suivre, pour les étudier, une des deux méthodes suivantes :

On peut continuer la recherche des propriétés de la fonction $f(z)$ comme d'une fonction nouvelle, sans s'occuper des conditions exprimées par les 2 équations aux dérivées partielles ni de leurs conséquences : c'est ce qu'ont fait Cauchy et ses disciples.

On peut aussi, avec Riemann et l'école allemande, partir des 2 conditions fondamentales que nous avons établies pour étudier les propriétés des 2 fonctions simultanées P et Q. Cette méthode se réduit à considérer une certaine équation différentielle du 2e ordre et à en épuiser les conséquences.

En effet, différentions les 2 équations aux dérivées partielles, l'une par rapport à x, l'autre par rapport à y : $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$

On en conclut : $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$

On aurait également : $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$

Ainsi tout revient à rechercher et à étudier les couples de fonctions P et Q qui vérifient cette équation différentielle du 2e ordre.

On pourra associer 2 fonctions quelconques P et Q satisfaisant l'éq. de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \Delta V = 0$$

et l'on obtiendra, ~~par un double quadrature~~ une fonction complexe $(P+iQ)$ qui sera une fonction analytique de $(x+iy)$.

Signalons tout de suite une solution particulière de cette équation, qui nous sera d'un grand usage dans la suite : c'est :

$$V = \log\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] = \log(r^2) = 2\log r \qquad \text{en posant :}$$

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \qquad r = \text{distance du point } (x,y) \text{ au point } (x_0,y_0)$$

Nous allons maintenant établir une formule importante relative à 2 fonctions U et V vérifiant l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$.

– Considérons l'intégrale double :
$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy$$
prise dans une aire quelconque.

U et V étant des fonctions de x et de y. Traitons-en séparément les 2 parties. On a identiquement :
$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Donc :
$$\iint\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy = \iint\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx\,dy - \iint U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy$$

Or on sait que :
$$\iint\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_c P\,dx \qquad\qquad \iint\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c Q\,dy$$

Donc :
$$\iint\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c U\frac{\partial V}{\partial x}\,dy - \iint U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy$$

On aura de même, en opérant sur la 2e intégrale double :
$$\iint\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_c U\frac{\partial V}{\partial y}\,dx - \iint U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dx\,dy$$

Ajoutons membre à membre les 2 égalités précédentes ; nous aurons la nouvelle

expression de l'intégrale double donnée :

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_c U\left(\frac{\partial V}{\partial x}dy-\frac{\partial V}{\partial y}dx\right)-\iint U\,\Delta V\,dx\,dy$$

Or on sait que α, β étant les cosinus directeurs de la normale dirigée à l'intérieur de l'aire considérée, on a : $dy=-ds\cos\alpha \quad dx=ds\cos\beta$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dy-\frac{\partial V}{\partial y}dx=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta\right)ds=-\frac{dV}{dn}ds$$

en désignant par $\frac{dV}{dn}$ la dérivée de V suivant la normale intérieure ;

on a donc enfin : $$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy=-\int_c U\frac{dV}{dn}ds-\iint U\,\Delta V\,dx\,dy$$

De cette formule nous allons déduire la formule de Green :

Puisque U et V sont symétriques nous pouvons les permuter dans l'égalité précédente ; le 1er membre ne change pas ; le 2e devient :

$$-\int_c V\frac{dU}{dn}ds-\iint V\,\Delta U\,dx\,dy$$ d'où l'égalité :

$$\int_c\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)ds+\iint(U\Delta V-V\Delta U)\,dx\,dy=0.$$

On suppose toujours que les fonctions U et V sont continues à l'intérieur de l'aire considérée. Dans le cas particulier où $U=1$, la formule devient :

$$\int_c\frac{dV}{dn}ds+\iint\Delta V\,dx\,dy=0.$$

Cette dernière formule est intéressante car elle s'applique à une foule de problèmes de physique où elle a pour conséquence l'éq : $\Delta V=0$.

Donnons-en un ou deux exemples.

L'étude de la distribution de la température dans une plaque en équilibre thermique dépend du principe de Fourier : La quantité de chaleur qui

traverse un élément d'arc ds du plan est proportionnelle à la dérivée de la fonction V suivant la normale, V représentant la température en fonction des coordonnées des divers points du plan. — On va montrer que cette fonction V doit satisfaire à l'équation : $\Delta V = 0$

En effet, la quantité de chaleur qui traverse un contour fermé C du plan a pour mesure l'intégrale : $K \int_c \frac{dV}{dn} ds$

Or cette somme doit être nulle, puisque la plaque est en équilibre thermique (il peut entrer et sortir de la chaleur dans le contour, mais la somme algébrique de la chaleur qui le traverse est nulle.) Ainsi l'on doit avoir :

$$\int_c \frac{dV}{dn} ds = 0$$

le long de tout contour fermé dans le plan. Il s'ensuit qu'on doit avoir aussi, en vertu de la formule de Green : $\iint \Delta V \, dx dy = 0$

c. à d. : $\Delta V = 0$ dans toute l'aire considérée.

Car si ΔV n'était pas nulle dans tout le plan, on pourrait enfermer dans un petit contour circulaire le ou les points pour lesquels ΔV serait différente de zéro, et l'intégrale double prise dans ce contour ne serait pas nulle.

Les mêmes considérations se retrouvent dans la théorie de la distribution de l'électricité, V représentant alors le potentiel en chaque point de la plaque.

Autre application physique, à laquelle se ramènent les précédentes, si l'on considère la chaleur et l'électricité comme des fluides :

Considérons le mouvement d'un fluide homogène incompressible dans un plan (ou dans une tranche infiniment mince) soumis à un régime permanent.

Soient $u(x,y)$, $v(x,y)$ les composantes de la vitesse de la molécule qui se trouve au point (x,y) ; soit V la valeur de cette vitesse. Calculons la masse de fluide qui traverse l'élément linéaire ds dans le temps élémentaire dt.

Toutes les molécules qui se trouvent sur ds sont transportées sur un élément linéaire parallèle au précédent, elles engendrent ainsi un parallélogramme qui a pour côtés ds et Vdt. Or V se projette suivant u et v sur les 2 axes; l'aire du parallélogramme a donc pour expression :

$$ds\,(u\cos\alpha + v\cos\beta)\,dt$$

α, β étant les cosinus directeurs de la normale à ds du côté intérieur à la courbe; on a ainsi la quantité de fluide qui traverse l'élément ds pendant le temps dt (abstraction faite de ρ, densité du liquide qui est constante.) Puisque le régime est permanent, nous pouvons faire $dt = 1$; pour une courbe fermée C, la quantité de fluide qui la traverse pendant l'unité de temps est :

$$\int_C (u\cos\alpha + v\cos\beta)\,ds$$

et cette quantité doit être nulle puisque le fluide est incompressible (il en entre autant qu'il en sort) –

Pour intégrer cette expression, il faut faire une hypothèse; nous admettrons que les fonctions u, v sont les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(x, y)$ – Cette hypothèse répond à la condition physique que le mouvement ait lieu sans tourbillons. Nous aurons alors à effectuer l'intégrale :

$$\int_C \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta\right) ds = \int_C \frac{d\varphi}{dn}\,ds$$

et cette intégrale doit être nulle le long d'un contour quelconque du plan. On doit donc avoir aussi, en vertu de la formule de Green :

$$\iint \Delta\varphi\,dx\,dy = 0 \qquad \text{d'où :} \qquad \Delta\varphi = 0$$

φ étant le potentiel de la vitesse du fluide en chaque point (x, y)

– Revenons à l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$

Nous savons que si V est une fonction continue à l'intérieur d'un contour C et vérifiant cette équation, on a : $\displaystyle\int_C \frac{dV}{dn}\,ds = 0$

la lettre n désignant, d'après nos conventions, la direction de la normale intérieure au contour considéré.

Prenons 2 fonctions U, V satisfaisant cette équation, et continues ainsi que leurs dérivées partielles des 2 premiers ordres à l'intérieur du contour C; la formule de Green se réduit dans ce cas à l'intégrale curviligne:

$$\int_C \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) ds = 0$$

Nous prendrons pour V une fonction quelconque à étudier, et pour U la fonction connue: $\log r$ r étant la distance du point mobile (x, y) au point fixe (x_0, y_0)

Supposons que le point (x, y) soit intérieur au contour C. Nous ne pouvons plus appliquer la formule de Green à ce contour, car la fonction $U = \log r$ n'est pas continue dans toute l'aire: elle est infinie au point (x_0, y_0) où $r = 0$. Isolons ce point par un petit cercle Γ, de rayon aussi petit qu'on voudra; les fonctions U et V sont continues dans l'aire comprise entre les contours C et Γ, et nous pouvons appliquer à ce double contour la formule de Green:

$$\int_C \left(\log r \frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right) ds + \int_\Gamma \left(\log r \frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right) ds = 0.$$

Dans la 1e intégrale, les dérivées ~~de V~~ sont prises suivant les normales intérieures au contour C; dans la 2e, elles sont prises suivant la normale intérieure à l'aire considérée, c.à.d. suivant la normale extérieure au cercle Γ. Si l'on veut considérer ce dernier contour comme indépendant et prendre les dérivées suivant la normale intérieure au cercle, il suffira de changer le signe de l'intégrale prise le long de Γ, puisque cela revient à en changer le sens:

$$\int_C \left(\log r \frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right) ds = \int_\Gamma \left(\log r \frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right) ds$$

Ainsi l'intégrale prise le long de C est égale à l'intégrale prise le long de Γ; pour

connaître la 1re il suffira de calculer la 2e, ce qui est plus facile.

Séparons-en d'abord les 2 parties. La 1e est: $\int_\Gamma \log r \frac{dV}{dn} ds$

Or le contour Γ est un cercle; donc r est constant le long de ce contour, et l'on peut écrire l'intégrale: $\log r \int_\Gamma \frac{dV}{dn} ds$

Or: $\int_\Gamma \frac{dV}{dn} ds = 0$ dans l'hypothèse où nous nous sommes placés. Donc la 1e partie de l'intégrale est nulle.

Reste la 2e: $-\int_\Gamma V \frac{d \log r}{dn} ds$ Or: $\frac{d\log r}{dn} = \frac{d \log r}{dr} \cdot \frac{dr}{dn} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dn}$.

Calculons $\frac{dr}{dn}$. $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ $r dr = (x-x_0)\frac{dx}{dn} + (y-y_0)\frac{dy}{dn}$.

$$\frac{dr}{dn} = \frac{x-x_0}{r}\frac{dx}{dn} + \frac{y-y_0}{r}\frac{dy}{dn} = -\left[\frac{x_0-x}{r}\frac{dx}{dn} + \frac{y_0-y}{r}\frac{dy}{dn}\right]$$

Or $\frac{dx}{dn}$, $\frac{dy}{dn}$ sont les cosinus directeurs de la normale n; $\frac{x_0-x}{r}$, $\frac{y_0-y}{r}$ sont les cosinus directeurs de la direction MA, c.à.d du segment r; donc, en appelant (r,n) l'angle AMN: $\frac{dr}{dn} = -\cos(r,n)$

Mais dans le cas particulier d'un cercle, comme Γ, la normale intérieure est le rayon; donc l'angle du rayon vecteur AM et de la normale MN est nul, et l'on a: $\frac{dr}{dn} = -1$

On peut se rendre compte géométriquement de ce résultat en remarquant que les accroissements de la normale à partir du p. M et du rayon à partir du p. A sont égaux et de signes contraires.

On a donc: $\frac{d\log r}{dn} = -\frac{1}{r}$ et l'intégrale devient: $+\int_\Gamma V \frac{1}{r} ds$

ou, puisque $r = \rho =$ constante; $\frac{1}{\rho}\int_\Gamma V ds$

Telle est l'expression à laquelle se réduit le 2e membre: $\int_\Gamma (\quad) ds$.
Elle est indépendante de ρ (rayon du cercle Γ) puisque le 1er membre n'en dépend pas.
On pourra donc faire ρ infiniment petit. V ~~diffèrera~~ tendra vers la valeur V_A

que cette fonction prend pour (x_0, y_0), c.à.d qu'elle sera comprise entre 2 valeurs M et m très peu différentes, pour toutes les valeurs de $|\rho| < \varepsilon$. L'intégrale sera comprise entre : $\frac{M}{\rho}\int_\Gamma ds$ et $\frac{m}{\rho}\int_\Gamma ds$ c.à.d. entre : $2\pi M$ et $2\pi m$ — Mais puisque, en vertu de la continuité de la ~~fonction~~ V, $(M-m)$ peut être rendue plus petite que toute quantité donnée, ~~l'intégrale~~ et que $\int_\Gamma$ est toujours comprise entre ces 2 limites supérieure et inférieure, l'intégrale doit être égale à $2\pi V_A$. Telle est donc aussi la valeur de l'intégrale prise le long du contour C, et l'on a la formule fondamentale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left(\log r\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{d\log r}{dn}\right) ds = V_A.$$

où r est la distance variable d'un point (x, y) du contour C au point intérieur $A(x_0, y_0)$ — Cette formule est très-remarquable, parce qu'elle ~~montre~~ représente la valeur de la fonction V en un point par une intégrale prise le long d'un contour qui enferme ce point, et il suffit pour cela de connaître la valeur de V et celle de sa dérivée suivant la normale intérieure $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ pour tous les points de ce contour. Le fait, assez étrange, que la valeur de V dans une aire, c.à.d suivant 2 dimensions, soit déterminée par les valeurs qu'elle prend sur le contour de cette aire, c.à.d suivant 1 dimension, est la conséquence de la condition : $\Delta V = 0$.

Dans le cas du cercle, la formule précédente peut se simplifier par l'élimination de $\frac{dV}{dn}$ — Prenons un point intérieur quelconque A, et appliquons la formule par rapport à ce point.

Soit A_1 le point conjugué du point A ; par définition, on a, en appelant r, r_1 les 2 distances MA, MA_1, a la distance OA et R le rayon du cercle :

$$\frac{r}{r_1} = \frac{a}{R} = \text{constante}.$$

Appliquons la formule de Green aux 2 fonctions V et $\log r_1$; r_1 étant la distance d'un point du ~~contour~~ cercle à un point extérieur ne s'annule jamais, et $\log r_1$ est continue à l'intérieur de l'aire ; on a donc à la fois :

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left(\log r \frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right) ds = V_A \qquad \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\log r_1 \frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r_1}{dn}\right) ds = 0.$$

Retranchons membre à membre ces 2 égalités :

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \log\frac{r}{r_1}\frac{dV}{dn}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_C V\left(\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn}\right) ds = V_A$$

Or on a, en vertu de la remarque faite précédemment :

$$\int_C \log\frac{r}{r_1}\frac{dV}{dn}\,ds = \log\frac{a}{R}\int_C \frac{dV}{dn}\,ds = 0 \qquad \text{car :} \quad \int_C \frac{dV}{dn}\,ds = 0.$$

Ainsi le terme en $\frac{dV}{dn}$ disparaît, et il reste :

$$\int_C V\left(\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn}\right) ds = V_A$$

formule extrêmement remarquable car elle fait dépendre la détermination de la fonction V dans tout le cercle du seul fait qu'elle est déterminée sur le contour de ce cercle. On est ainsi amené à étudier le problème général de la détermination des intégrales à l'intérieur d'une aire quelconque, que nous traiterons plus tard.

Posons, pour simplifier la formule que nous venons d'obtenir :

angle $AMO = \varphi$ angle $A_1MO = \varphi_1$.

$$\frac{d\log r}{dn} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dn} = \frac{-\cos(r,n)}{r} = -\frac{\cos\varphi}{r} \qquad \frac{d\log r_1}{dn} = -\frac{\cos\varphi_1}{r_1}$$

La formule devient : $$V_A = \frac{-1}{2\pi}\int_C V\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi_1}{r_1}\right) ds$$

Calculons $\frac{\cos\varphi}{r}$ et $\frac{\cos\varphi_1}{r_1}$.

$$\begin{cases} a^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi \\ a_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi_1 \end{cases}$$

$$\frac{R^2 - a^2}{r^2} + 1 = 2R\frac{\cos\varphi}{r} \qquad \frac{R^2 - a_1^2}{r_1^2} + 1 = 2R\frac{\cos\varphi_1}{r_1}$$

Or, on sait que $aa_1 = R^2$ $\qquad \frac{r}{r_1} = \frac{a}{R} = \frac{R}{a_1}$

$$\frac{R^2 - a_1^2}{r_1^2} = \frac{R^2(a^2-R^2)}{r_1^2 a^2} = \frac{a^2-R^2}{r^2} \qquad \frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi_1}{r_1} = \frac{R^2-a^2}{Rr^2}$$

L'intégrale devient donc: $\displaystyle V_A = \frac{1}{2\pi}\int_c V \frac{R^2-a^2}{Rr^2}\,ds$

Nous allons tirer de cette formule plusieurs conséquences importantes. Mettons d'abord en évidence la variable d'intégration, en introduisant les coordonnées polaires r et ψ du point A (r est ce que nous avons désigné par a; ψ est l'angle $x\hat{O}M$.) Appelons φ l'angle constant que fait OA avec Ox: $\quad r^2 = \overline{MA}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi)$

On a d'ailleurs: $\quad ds = R\,d\psi$. $\qquad$ La formule devient donc:

$$V_A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi-\varphi) + r^2}\,d\psi$$

l'intégrale étant prise le long de la circonférence de $\psi = 0$ à $\psi = 2\pi$, V prenant une valeur connue en chaque point de la circonférence.

— Définition d'une fonction analytique de 2 variables réelles.

On dit qu'une fonction de x, y est analytique dans une certaine aire, si dans le voisinage d'un point quelconque (x_0, y_0) pris dans cette aire on peut la développer en une série:

$$\varphi_0 + \varphi_1(x-x_0, y-y_0) + \varphi_2(x-x_0, y-y_0) + \ldots\ldots + \varphi_m(x-x_0, y-y_0) + \ldots$$

φ_m étant un polynôme homogène de degré m en x, y; la série étant convergente tant que: $\quad |x - x_0| < \delta \quad |y - y_0| < \delta$

même quand on remplace dans chaque polynôme φ chaque terme par sa valeur absolue.

Les conditions que nous venons d'énoncer, et notamment la dernière, rendent la fonction analytique ainsi définie susceptible de dérivation:

En effet, pour avoir la dérivée de la série, il suffit de former la série des dérivées de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_m$: car on peut ordonner la série suivant les puissances croissantes de x, par exemple, sans qu'elle cesse d'être convergente, prendre la dérivée de chaque terme en x, puis rétablir l'ordre primitif des termes : on aura ainsi pris les dérivées de $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_m$ par rapport à x.

Théorème. La fonction V_A, représentée par l'intégrale (de Poisson) trouvée plus haut, est une fonction analytique.

Pour le prouver, nous allons développer l'intégrale en série. Posons d'abord

$\frac{r}{R} = \rho \qquad \theta = \psi - \varphi$ On a évidemment $\rho^2 < 1$.

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi-\varphi) + r^2} = \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}$$

Décomposons cette fraction en fractions simples :

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} = \frac{1-\rho^2}{(1-\rho e^{\theta i})(1-\rho e^{-\theta i})} = -1 + \frac{1}{1-\rho e^{\theta i}} + \frac{1}{1-\rho e^{-\theta i}}$$

$$\frac{1}{1-\rho e^{\theta i}} = 1 + \rho e^{\theta i} + \rho^2 e^{2\theta i} + \ldots\ldots + \rho^n e^{n\theta i} + \frac{\rho^{n+1} e^{(n+1)\theta i}}{1-\rho e^{\theta i}}$$

$$\frac{1}{1-\rho e^{-\theta i}} = 1 + \rho e^{-\theta i} + \rho^2 e^{-2\theta i} + \ldots\ldots + \rho^n e^{-n\theta i} + \frac{\rho^{n+1} e^{-(n+1)\theta i}}{1-\rho e^{-\theta i}}$$

Comme les restes tendent vers 0 quand n augmente indéfiniment, on peut prendre les séries prolongées à l'infini, et l'on a pour somme :

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} = 1 + \rho e^{\theta i} + \rho e^{-\theta i} + \ldots\ldots + \rho^n e^{n\theta i} + \rho^n e^{-n\theta i} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 2\rho\cos\theta + \ldots\ldots + 2\rho^n \cos n\theta + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \rho^n \cos n\theta$$

Ou, sous la forme primitive :

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\psi-\varphi)$$

L'intégrale devient donc: $$V_A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\left[1+2\sum\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\psi-\varphi)\right]d\psi$$

où V est fonction de ψ.

Séparons les éléments constituants de cette intégrale pour avoir V_A en série d'intégrales, et posons: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V\cos n\psi\, d\psi \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V\sin n\psi\, d\psi$

à cause de la formule:
$$\cos n(\psi-\varphi) = \cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi$$
On aura alors:
$$V_A = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right)$$
série trigonométrique

Ce développement de V_A est extrêmement remarquable, notamment pour l'étude de la série de Fourier. — Il nous sert présentement à prouver que V_A est une fonction analytique de x, y. Le point O étant pris pour origine, nous savons que les coordonnées du point A sont
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
V_A est développé en une série dont le terme général est:
$$\frac{r^n}{R^n}\left(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\right)$$
Or $r^n\cos n\varphi$ et $r^n\sin n\varphi$ sont des polynômes homogènes de degré n en x et y, car: $(x+iy)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Donc le terme général de V_A est un polynôme homogène de degré n.

Reste à montrer que la série est convergente dans les conditions de la définition; on va voir que cela a lieu dans un cercle de rayon suffisamment petit.

Le polynôme $r^n\cos n\varphi$ est la partie réelle du développement de: $(x+iy)^n$ — Si l'on y remplace chaque terme par sa valeur absolue le résultat sera moindre que: $(|x|+|y|)^n$; en effet, le développement de ce binôme

est un polynôme homogène en x, y, et il est égal ou supérieur au développement de $(x+iy)^n$ où on aurait remplacé chaque terme par sa valeur absolue. De même, $r^n \sin n\varphi$, où l'on aurait remplacé chaque terme par sa valeur absolue est inférieur à $\left(|x|+|y|\right)^n$. D'autre part a_n, b_n sont des quantités finies et constantes ; donc elles sont toutes inférieures à un nombre positif M en valeur absolue. ~~Ainsi~~ le terme général de la série est, quand on y remplace tous les termes par leurs valeurs absolues inférieur à :

$$\frac{2M}{R^n}\left(|x|+|y|\right)^n$$

Prenons donc : $|x| < R\alpha$ $\qquad |y| < R\alpha$

le terme général de la série sera à fortiori inférieur à :

$$\frac{2M}{R^n}\left(2R\alpha\right)^n = 2M\left(2\alpha\right)^n$$

Donc, si l'on prend : $2\alpha < 1$ ou $\alpha < \frac{1}{2}$

la série sera absolument convergente au sens spécial de la définition ; ainsi la fonction V_A est analytique dans une certaine région, qui est un carré dont les côtés (parallèles à Ox, Oy) sont distants du centre de $R\alpha < \frac{R}{2}$.

Remarquons que le développement de V_A :

$$V_A = \varphi_0 + \varphi_1(x-x_0, y-y_0) + \ldots\ldots + \varphi_n(x-x_0, y-y_0) + \ldots\ldots$$

n'est autre chose que le développement de Taylor appliqué à une fonction de 2 variables. On peut donc énoncer brièvement la ~~proposition~~ définition précédente en disant : Une fonction analytique de 2 variables est développable par la formule de Taylor.

Théorème. La fonction V ne peut avoir ni maximum ni minimum dans l'aire où elle est continue ainsi que ses dérivées partielles.

En effet, V étant représentée par le développement en série φ_n, on a :

$\Delta V = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_m = 0$ (V étant du degré m)

ce qui exige qu'on ait séparément : $\Delta\varphi_1 = 0, \ \Delta\varphi_2 = 0, \dots \Delta\varphi_m = 0.$

Supposons qu'au point (x_0, y_0) que nous prendrons pour origine V ait un maximum ou un minimum (qui est φ_0) ; on aura le développement :

$$V - \varphi_0 = \varphi_m + \varphi_{m+1} + \dots\dots$$

où $m > 1$, sans quoi V ne pourrait avoir ni minimum ni maximum. Or c'est φ_m qui donne son signe au développement ; donc cette fonction doit garder toujours le même signe au voisinage du p. (x_0, y_0). Mais cela est impossible, car : $\varphi_m = \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$

et l'équation ; $a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi = 0$

a des racines (en $tg\varphi$.) Donc φ_m change nécessairement de signe au voisinage de (x_0, y_0), et il n'y a ni maximum ni minimum pour V.

Gauss a démontré la même proposition sans employer le développement en série :

On a vu que l'intégrale curviligne : $-\int_\Gamma V \frac{d\log r}{dn} ds$ prise le long du cercle Γ, est indépendante du rayon de ce cercle ; elle est donc égale à :

$$\frac{1}{\rho}\int_\Gamma V ds = 2\pi V_A.$$

V_A étant la valeur de V pour le centre A du cercle Γ. Supposons que V_A soit un maximum ; c à d qu'on ait : $V_A > V$ pour tous les points voisins de A, c à d pour tous les points du cercle Γ (qu'on peut rendre aussi petit qu'on veut.) On aurait par suite :

$$\int_\Gamma V_A ds > \int_\Gamma V ds \qquad \text{c à d.} \qquad 2\pi\rho V_A > \int V ds \qquad 2\pi V_A > \frac{1}{\rho}\int_\Gamma V ds$$

ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc la fonction V n'admet ni maximum ni minimum

Nous allons déduire immédiatement de ce théorème une première conséquence :

— Il ne peut pas exister 2 fonctions continues dans un certain contour, prenant sur ce contour des valeurs identiques et satisfaisant l'équation différentielle :

$$\Delta V = 0$$

En effet, supposons que V_1 et V_2 soient de telles fonctions. Posons :

$$V_1 - V_2 = U$$

On a évidemment, en vertu de la continuité : $\Delta U = 0$

D'ailleurs U est nulle le long du contour, en vertu de l'hypothèse ; donc elle est nulle à l'intérieur de ce contour ; car autrement, étant continue, elle aurait un maximum ou un minimum, ce qui est impossible ; par conséquent les 2 fonctions V_1 et V_2 prennent des valeurs identiques, non seulement sur le contour, mais dans tout le intérieur, ce qui revient à dire qu'elles sont identiques.

— Autre mode de démonstration : Si une solution de l'équation $\Delta V = 0$ est nulle suivant un contour, elle est nulle à l'intérieur de ce contour.

Partons de la formule :

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int_c U\frac{dV}{dn}ds - \iint U\Delta V\,dx\,dy$$

qui se réduit dans ce cas à :

$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy = -\int_c U\frac{dU}{dn}ds$$

Intégrons par rapport à un même contour fermé : l'intégrale curviligne sera nulle, donc l'intégrale double du 1er membre, prise à l'intérieur de ce contour, devra être nulle. Or tous ses éléments sont essentiellement positifs ; il faut donc qu'on ait constamment : $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

c à d que la fonction U soit constamment nulle à l'intérieur du contour.

On est amené à penser que l'équation : $\Delta V = 0$
n'est pas la seule qui fournisse des fonctions déterminées dans une aire par les valeurs qu'elles prennent sur le contour de cette aire.
Considérons l'intégrale double :

$$\iint U\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial U}{\partial x} + 2E\frac{\partial U}{\partial y} + FU\right] dx\,dy$$

où U est une fonction de x, y, ainsi que D, E, F, et supposons :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial U}{\partial x} + 2E\frac{\partial U}{\partial y} + FU = 0$$

Cette condition reviendrait à l'équation : $\Delta U = 0$
si D, E, F étaient nuls. Nous supposons que la fonction U est nulle sur le contour d'une aire à l'intérieur de laquelle elle est continue.
L'intégrale double que nous considérons est nulle, puisque tous ses éléments sont nuls. Transformons-la en séparant ses divers éléments que nous intégrerons par parties :

$$\iint U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx\,dy = \int_c U\frac{\partial U}{\partial x}dy - \iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = -\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$$

puisque l'intégrale curviligne est nulle. De même :

$$\iint U\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dx\,dy = -\iint\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

$$\iint D\frac{2U\partial U}{\partial x}dx\,dy = \int_c DU^2 dy - \iint U^2\frac{\partial D}{\partial x}dx\,dy = -\iint U^2\frac{\partial D}{\partial x}dx\,dy$$

$$\iint E\frac{2U\partial U}{\partial y}dx\,dy = -\iint U^2\frac{\partial E}{\partial y}dx\,dy$$

Il reste : $\iint FU^2\,dx\,dy$. Ajoutons en changeant tous les signes ; l'intégrale donnée prend la forme :

$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial x}+\frac{\partial E}{\partial y}-F\right)U^2\right]dx\,dy=0.$$

La quantité entre crochets (élément différentiel) est une fonction de x, y. Si l'on a pour tous les points de l'aire considérée :

$$\frac{\partial D}{\partial x}+\frac{\partial E}{\partial y}-F>0$$

l'intégrale ne pourra être nulle que si l'on a à la fois :

$$U=0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

Considérons par exemple l'équation : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-K^2U=0$

où $F=-K^2$; les conditions sont vérifiées : $K^2>0$

Donc la fonction U, supposée continue à l'intérieur du contour et nulle le long de ce contour, est aussi nulle à l'intérieur. On en conclut comme précédemment qu'il n'y a qu'une seule fonction, continue à l'intérieur du contour, qui prenne une série de valeurs déterminées le long de ce contour, c.à.d. que cette série de valeurs sur le contour détermine une fonction univoque à l'intérieur du contour.

Nous allons étendre les considérations précédentes au moyen d'un artifice qui nous permettra de traiter des cas un peu plus généraux. Soit l'intégrale double : $\iint\left[\frac{\partial(BU^2)}{\partial x}+\frac{\partial(B'U^2)}{\partial y}\right]dx\,dy$

où U, B, B' sont fonctions de x, y.

On suppose que U est nulle le long du contour, donc aussi à l'intérieur ; l'intégrale est donc nulle quelles que soient les fonctions B, B' — Ajoutons-la à l'intégrale double précédemment trouvée, on aura une nouvelle intégrale nulle :

$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+2BU\frac{\partial U}{\partial x}+2B'U\frac{\partial U}{\partial y}+\left(\theta+\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}\right)U^2\right]dx\,dy=0$$

en posant : $$\theta = \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} - F$$

L'élément différentiel est une forme quadratique en $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$.
Pour pouvoir tirer une conclusion de cette formule, il faut que cette forme quadratique soit définie positive, car alors tous ses termes devront être nuls ; on aura ainsi des équations contenant les 2 fonctions arbitraires B et B' – Pour trouver à quelles conditions la forme quadratique sera définie positive, décomposons-la en carrés ; ce sera une somme de 3 carrés ; extrayons le premier :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + BU\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + 2B'U\frac{\partial U}{\partial y} + \left(\theta + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - B^2\right)U^2$$

Il reste un trinôme du 2e degré en U et $\frac{\partial U}{\partial y}$; pour qu'il soit constamment positif, on devra avoir : $$B'^2 - \left(\theta + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - B^2\right) < 0.$$

ou : $$B^2 + B'^2 - \theta < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}$$

Cette condition a une forme assez singulière. Si dans le contour considéré on peut déterminer 2 fonctions continues B, B' de x et y, telles que l'inégalité précédente soit vérifiée pour toutes les valeurs comprises dans le contour, l'intégrale n'aura qu'une valeur en chaque point de l'aire enfermée par le contour.

On peut montrer en certains cas particuliers que dans un contour suffisamment restreint la condition précédente est satisfaite. Prenons par exemple $B' = 0$, et B fonction de x seulement ; l'inégalité se réduit à : $B^2 - \theta < \frac{\partial B}{\partial x}$ ou : $\frac{\partial B}{\partial x} - B^2 > -\theta$.
Soit M^2 la valeur absolue maximum de $\theta(x,y)$ quand le point (x,y) reste dans une certaine région du plan, et prenons $M_1^2 > M^2$. Si l'on

pose l'équation : $\frac{dB}{dx} - B^2 = M_1^2$

la condition sera sûrement vérifiée dans l'aire considérée. Résolvons :

$$\frac{dB}{dx} = B^2 + M_1^2 \qquad dx = \frac{dB}{B^2+M_1^2} \qquad M_1\,dx = \frac{\frac{dB}{M_1}}{1+\frac{B^2}{M_1^2}}$$ Intégrons :

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{M_1} = M_1 x + C \qquad B = M_1\,\operatorname{tg}(M_1 x + C)$$

Telle est la valeur que nous devrons prendre pour B. Mais si nous voulons que cette fonction de x soit continue dans l'aire considérée, il ne faut pas que cette aire soit trop étendue, au moins dans le sens des x : car pour : $x = \frac{K\pi}{M_1}$ B deviendrait infinie.

Mais si le contour est compris entre 2 parallèles à Oy distantes de $\frac{\pi}{M_1}$, on pourra toujours disposer de la constante arbitraire C de manière que le contour ne rencontre aucune des droites : $x = \frac{K\pi}{M_1}$ sur lesquelles B devient infinie. Il suffit donc que la distance entre les 2 tangentes au contour parallèles à Oy soit inférieure à $\frac{\pi}{M}$, et à cette condition, on pourra appliquer le théorème à ce contour.

Ce résultat est évidemment indépendant de la situation des axes ; on pourrait appliquer les mêmes considérations à l'axe des y, puis à des axes orientés d'une façon quelconque dans le plan. Donc, M^2 étant la plus grande valeur absolue que prend θ dans la région du plan considérée, il suffira que le contour soit compris entre 2 parallèles de direction quelconque dont la distance soit inférieure à $\frac{\pi}{M}$, pour que l'intégrale n'ait qu'une solution à l'intérieur de ce contour.

Considérons encore l'équation : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + K^2 V = 0$

(équation de la vibration des membranes)

On voit qu'ici : $\theta = -K^2$ $M = K$.

Les tangentes parallèles extrêmes devront donc avoir une distance minima

inférieure à $\frac{\pi}{K}$. — Quand on change l'orientation des axes, ΔU ou $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ne varie pas, donc la bande qui comprend le contour peut avoir une orientation quelconque, en ayant toujours une largeur égale à $\frac{\pi}{K}$. — Ainsi, si l'on trace dans le plan un contour qui puisse être contenu dans une pareille bande, càd. dont 2 tangentes parallèles extrêmes aient une distance inférieure à $\frac{\pi}{K}$, on pourra affirmer que l'intégrale n'admet qu'une solution à l'intérieur de ce contour. Le contour peut d'ailleurs s'étendre autant qu'on veut dans la bande, et son aire est illimitée.

Telle est la condition pour qu'une intégrale de la forme considérée soit déterminée à l'intérieur d'un contour par les valeurs qu'elle prend sur ce contour, càd. soit nulle à l'intérieur si elle est nulle sur le contour. Cela n'arrive pas en général, et nous allons montrer par un exemple qu'une intégrale peut être nulle en tous les points d'un contour fermé, et non nulle à l'intérieur de ce contour. Soit :

$U = \sin mx \sin my$ la fonction considérée.

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -m^2 \sin mx \sin my$ $\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -m^2 \sin mx \sin my$

L'équation est $\quad -2m^2 \sin mx \sin my + K^2 \sin mx \sin my = 0$

d'où : $K^2 = 2m^2 \qquad m = \frac{K}{\sqrt{2}} \qquad U = \sin\frac{Kx}{\sqrt{2}} \sin\frac{Ky}{\sqrt{2}}$

Considérons les 2 axes Ox, Oy ; la fonction U s'annule sur ces 2 axes, car elle est nulle pour $x = 0$, $y = 0$. Menons les droites respectivement parallèles à Oy et à Ox, dont les équations sont

$$x = \frac{\pi\sqrt{2}}{K} \qquad y = \frac{\pi\sqrt{2}}{K}$$

La fonction U est également nulle sur ces 2 droites ; donc elle est nulle sur le contour du carré ainsi formé, mais elle n'est pas nulle à l'intérieur

On voit aisément que la condition n'est pas remplie car les côtés du carré sont : $\frac{\pi\sqrt{2}}{K}$ distance supérieure à $\frac{\pi}{K}$.

Ainsi une intégrale de la forme considérée n'est pas déterminée d'une façon univoque à l'intérieur d'un contour quelconque le long duquel elle est nulle.

— Les développements en série permettent de déduire d'autres conséquences importantes. Supposons que dans l'intégrale considérée précédemment, les facteurs D, E, F soient fonctions [de x, y] [analytiques]. On peut démontrer que toute intégrale de cette forme, continue ainsi que ses dérivées des 2 premiers ordres ~~dans~~ sur dans un contour fermé, est une fonction analytique dans cette même aire. — C'est un théorème que nous admettrons dans ce qui va suivre.

Supposons que F soit identiquement nulle, et qu'on ait simplement :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial V}{\partial x} + 2E\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

On va prouver que cette fonction V n'a ni maximum ni minimum.

En effet, puisque la fonction V est analytique par hypothèse, on peut la développer en série ; $V = \varphi_0 + \varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots\dots$

et $n > 1$, car on suppose que V a un maximum ou minimum, qui est d'ailleurs φ_0. — On aura aussi pour D et E des développements analogues : $d_0 + d_1 + d_2 + \dots\dots$ $e_0 + e_1 + e_2 + \dots\dots$

Portons ces développements dans l'équation considérée :

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} + \dots\dots + 2\left[d_0 + d_1 + \dots\right]\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + \dots\right) + 2\left[e_0 + e_1 + \dots\right]\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} + \dots\right) = 0.$$

Cette série se compose d'une suite de sommes de termes homogènes en x, y, qu'on peut égaler successivement à zéro. Le terme de moindre degré est : $\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}$ et l'on a : $\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} = 0$

Ainsi la fonction rationnelle homogène φ_n satisfait à l'éq : $\Delta V = 0$. Donc φ_n n'a pas un signe invariable au voisinage du point considéré $(x_0 y_0)$ et conséquemment V n'a ni maximum ni minimum. Il s'ensuit que l'intégrale de l'équation considérée ne peut avoir non plus ni maximum ni minimum (Il s'agit de l'intégrale double dont l'élément serait le 1er membre de l'équation.) Il en résulte qu'une intégrale de cette forme, nulle sur le contour, est aussi nulle à l'intérieur, et que 2 intégrales qui auraient les mêmes valeurs sur le contour seraient aussi identiques à l'intérieur.

Le raisonnement précédent ne s'applique plus au cas où il y a un terme FU : il n'est pas vrai que l'intégrale ne puisse avoir ni maximum ni minimum, et il faut modifier la conclusion précédente.

Supposons que $F(x,y)$ soit ~~constamment~~ négative dans la région considérée du plan ; ~~on va prouver~~ on peut toujours vérifier cette hypothèse en changeant le signe de l'intégrale. On va prouver qu'il ne pourra pas y avoir dans cette aire pour l'intégrale un maximum qui soit positif ou un minimum qui soit négatif.

Supposons, ce qui est toujours permis, que la fonction V soit maximum pour $x = 0$, $y = 0$: on aura le développement :

$$V = \varphi_0 + \varphi_n(x,y) + \varphi_{n+1}(x,y) + \dots\dots \qquad \varphi_0 > 0 \qquad n > 1.$$

φ_0 est cette valeur maximum, donc φ_n, qui donne son signe au développement, est négative au voisinage du p. O. Ajoutons au développement obtenu précédemment le développement du ~~dernier~~ terme FU :

$$(f_0 + f_1 + f_2 + \dots\dots)(\varphi_0 + \varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots\dots)$$

La somme doit encore être nulle. Le terme indépendant de x, y : $f_0 \varphi_0$ n'est pas nul, car on a : $f_0 < 0$, $\varphi_0 > 0$.

Il ne peut être détruit dans la somme que par un terme indépendant de x, y ; or $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}$, ... dépendent toutes de x, y. Les dérivées secondes

en dépendent aussi, à moins que φ_n ne soit du 2e degré : on doit donc avoir : $n = 2$ et $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + f_0 \varphi_0 = 0$

Or : $\varphi_2 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ $\quad 2(\alpha+\gamma) + f_0\varphi_0 = 0.$

Or α et γ sont de même signe, puisqu'il y a un maximum en O, et que φ_2 doit avoir le même signe au voisinage de ce point. D'ailleurs, puisqu'il y a maximum pour $x = 0$, $y = 0$, φ_2 ne peut être que négatif, et $(\alpha+\gamma)$ est une quantité négative. $2(\alpha+\gamma) = -f_0\varphi_0$

$f_0\varphi_0$ devrait donc être positif ; mais on a par hypothèse :

$$f_0 < 0, \quad \varphi_0 > 0 \quad \text{d'où :} \quad f_0\varphi_0 < 0$$

ce qui contredit la conclusion précédente. Il ne peut donc pas y avoir de maximum positif dans la région du plan où F est négative. De même il ne peut pas y avoir dans la même région de minimum négatif pour la fonction V (même démonstration).

Corollaire : L'intégrale de l'équation précédente est complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend le long d'un contour fermé appartenant à la région du plan où $F(x,y) < 0$.

En effet, s'il y avait 2 intégrales distinctes prenant les mêmes valeurs suivant le contour considéré, leur différence serait nulle sur ce contour. Supposons d'abord qu'elle ne s'annule pas à l'intérieur du contour : comme elle est continue, elle aura toujours le même signe, que nous pouvons toujours supposer être + ; elle aura donc un maximum qui sera nécessairement positif, ce qui est impossible en vertu du théorème précédent.

Supposons maintenant que la différence change de signe dans l'aire considérée. On pourra toujours partager cette aire en un certain nombre d'autres sur le contour desquelles la différence sera nulle (en vertu de sa continuité) et à l'intérieur desquelles elle ne changera pas de signe ;

en appliquant le raisonnement précédent à toutes ces aires partielles, on verra que la différence ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif dans chacune d'elles ; elle est donc constamment nulle dans toute l'aire considérée, ce qui prouve que les 2 intégrales sont identiques.

Revenons à l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

Nous savons qu'il ne peut exister qu'une intégrale continue dans un contour donné et prenant des valeurs déterminées le long de ce contour. Il reste à savoir s'il en existe toujours une telle, et, si elle existe, comment on peut l'obtenir (problème traité par Dirichlet, Riemann, et posé par Green.)

Considérons l'intégrale double : $\iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$

étendue à l'aire considérée.

(La démonstration qui suit n'est pas rigoureuse, mais nous la donnons car elle est employée dans beaucoup de problèmes de physique ; nous en ferons ressortir les lacunes et nous donnerons ensuite la démonstration exacte.)

On suppose que la fonction U continue satisfait l'équation $\Delta V = 0$ et prend certaines valeurs déterminées le long du contour C.

Considérons une fonction V également continue et prenant les mêmes valeurs suivant le même contour C. Je dis que si l'on substitue V à U dans l'intégrale double, celle-ci prendra une valeur plus grande que pour U ; en d'autres termes, de toutes les fonctions qui prennent les mêmes valeurs sur le même contour, c'est celle qui vérifie l'équation de Laplace qui rend l'intégrale minima.

Posons en effet : $V = U + h$

h est une fonction continue de x, y qui s'annule le long du contour C.

Il s'agit de prouver l'inégalité suivante :

$$\iint \left[\left(\frac{\partial (U+h)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (U+h)}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy > \iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

Développons le 1er membre :

$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + 2\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)dxdy + \iint\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

La 1e intégrale est l'intégrale donnée qui forme le 2e membre ; la 3e est essentiellement positive. Quant à la 2e, elle est facile à calculer par la formule (p. 30) :
$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)dxdy = -\int_C h\frac{dU}{dn}ds - \iint h\,\Delta U\,dxdy$$

Or les 2 intégrales du 2e membre sont nulles, car h est nulle sur le contour C, et $\Delta U = 0$ par hypothèse. Donc l'intégrale en V se réduit à la somme de l'intégrale en U et d'une intégrale essentiellement positive, ce qui démontre l'inégalité proposée.

Réciproque : Si une certaine fonction continue $U(x,y)$ rend l'intégrale double proposée plus petite que ne ferait toute autre fonction continue prenant les mêmes valeurs que U sur un contour C, U est une solution de l'équation de Laplace : $\Delta U = 0$.

Considérons en effet la fonction : $U(x,y) + h\,V(x,y)$

V étant elle-même une fonction de x, y qui s'annule sur le contour, de sorte que $U(x,y) = U(x,y) + h\,V(x,y)$ sur ce contour. Substituons-la à la 1e dans l'intégrale ; celle-ci devra être plus grande par hypothèse que
$$\iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$\iint\left[\left(\frac{\partial(U+hV)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(U+hV)}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = \iint\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + 2h\iint\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ h^2\iint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

Or on sait que la 2e intégrale du second membre est égale à :
$$\iint\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right]dxdy = -\int_C V\frac{dU}{dn}ds - \iint V\Delta U\,dxdy = -\iint V\Delta U\,dxdy$$

car l'intégrale curviligne est nulle avec V. — Tel est le coefficient de 2h dans le 2e membre. Or, si le coefficient de h n'est pas nul identiquement, la 2e intégrale pourra être rendue plus petite que la 1e, car leur différence, pour h suffisamment petit, prend le signe de h, qui est arbitraire : or cela contredit l'hypothèse ; donc il faut qu'on ait identiquement :

$$\iint V\Delta U \, dx dy = 0$$

V étant d'ailleurs une fonction quelconque, assujettie à être continue ainsi que ses dérivées des 2 premiers ordres dans l'aire considérée, et à s'annuler sur le contour : sous ces conditions, nous pouvons la choisir arbitrairement. — Or supposons que ΔU ne soit pas nulle dans toute l'aire, il y aura un point (a, b) où elle ne sera pas nulle, et au voisinage duquel elle aura le même signe, + par exemple. On peut donc décrire autour du p. (a, b) comme centre un cercle suffisamment petit pour que dans ce cercle ΔU soit positive. Posons maintenant : $V = 0$ dans l'aire annulaire comprise entre le contour C et le petit cercle, et :

$$V = \left[\rho^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2\right]^m$$

dans l'aire du petit cercle : V sera nulle sur le contour de ce cercle, donc continue dans toute l'aire C — Les dérivées partielles du 1er ordre s'annulent aussi sur la circonférence Γ comme dans l'aire annulaire, si $m > 1$: elles sont donc aussi continues. Enfin ses dérivées partielles du 2e ordre s'annulent sur la circonférence comme à l'extérieur, pourvu que $m > 2$ elles sont donc aussi continues. Ainsi la fonction V satisfait aux conditions de continuité, est nulle dans l'aire annulaire et sur le contour Γ, et prend des valeurs ~~différentes de zéro~~ positives en tous les points intérieurs à Γ. L'intégrale :

$$\iint V\Delta U \, dx dy$$

est donc nulle dans l'aire annulaire ; mais à l'intérieur du cercle Γ, on a

à la fois : $V > 0$ $\Delta U > 0$ pour tous les points ; donc l'intégrale est nécessairement positive dans cette aire, et conséquemment dans l'aire C. Comme cela est contraire à l'hypothèse, il faut qu'on ait en tous les points de l'aire C :

$$\Delta U = 0 \qquad \text{c.q.f.d}$$

Il reste à démontrer l'existence de la fonction V prenant sur le contour considéré une succession de valeurs données et satisfaisant à l'équation de Laplace. On a souvent employé le raisonnement suivant :

— Comme l'intégrale :

$$\iint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

est toujours positive quelle que soit la fonction V, quand on y introduit toutes les fonctions V qui prennent la même suite de valeurs sur le contour, elle doit passer par un minimum, et on sait par le théorème précédent que la fonction qui la rend minimum satisfait l'équation de Laplace.

Ce raisonnement n'est pas rigoureux. On peut sans doute démontrer que l'intégrale a un minimum, c.à.d qu'il existe un nombre $M > 0$ au-dessous duquel elle ne peut descendre. Mais on ne sait si l'intégrale <u>atteint</u> cette limite inférieure pour une fonction continue $V(x, y)$ ou si elle ne fait que s'en approcher indéfiniment (définition de la limite) ; il n'est donc pas prouvé qu'elle prenne une valeur minimum.

D'ailleurs, quand ce raisonnement serait rigoureux, il ne donnerait aucun moyen de déterminer même approximativement la fonction V qui rend l'intégrale minimum.

Nous allons employer une autre méthode qui nous permettra de construire cette fonction V ; on sera alors assuré qu'elle existe.

On sait que toute fonction continue dans un contour C et satisfaisant à l'équation de Laplace peut se mettre sous la forme : (page 35)

$$V(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C\left[\log r\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{d\log r}{dn}\right] ds$$

où r représente le rayon vecteur issu d'un point (a, b) intérieur à l'aire et aboutissant au point mobile sur le contour. Cette intégrale exprime ~~V dans~~ la valeur de V pour le point (a, b) en fonction des valeurs de V et de $\frac{dV}{dn}$ sur le contour. Or $\frac{dV}{dn}$ est déterminée par les valeurs de V sur le contour et à l'intérieur de l'aire, puisque c'est une fonction continue ainsi que ses dérivées; mais nous ne pouvons pas la connaître. C'est dans le cas d'un cercle seulement que nous avons une expression indépendante de $\frac{dV}{dn}$; (page 37.)

$$V(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int f(\psi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi$$

$A(a,b)$ ou (r, φ) — M, A, O, ψ, φ — $OA = r$.

en posant $R = 1$, et $V = f(\psi)$ sur la circonférence; l'intégrale devant être prise de 0 à 2π, ou dans un intervalle quelconque égal à 2π (car ψ admet la période 2π.)

Mais il s'agit de résoudre la question inverse: on se demande maintenant si, en prenant cette formule comme donnée, et $f(\psi)$ étant continue, l'intégrale fonction de (r, φ) ou de (a, b) sera déterminée à l'intérieur du cercle et si elle prendra sur la circonférence la valeur $f(\psi)$.

Il est facile de voir d'abord que cette fonction de (a, b) satisfait à l'équation de Laplace — Comme $f(\psi)$ ne dépend pas de (a, b), nous n'avons à considérer que l'élément variable:

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}$$

fonction de (r, φ) ou de (a, b)

Or, si nous considérons la quantité:

$$\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\quad\left[\text{mult. les 2 termes par } e^{-i\psi}-re^{-i\varphi}\quad \frac{1+2ir\sin(\varphi-\psi)-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\right]$$

où : $z = (a+ib) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

nous trouvons aisément que sa partie réelle n'est autre que la fraction considérée; donc elle satisfait à l'équation : $\Delta V = 0$

comme ~~toute~~ fonction continue et analytique de $(a+ib)$.

Par conséquent l'intégrale en question, considérée comme fonction de (a, b) satisfait à la condition : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$
(On pourrait le vérifier directement.)

Reste à savoir quelles valeurs cette intégrale prend sur le contour, et si elles sont identiques à celles de la fonction : $f(\psi)$.
Considérons le point M_0 de ce contour, soit φ_0 son angle polaire ; il faut que l'intégrale ait pour limite $f(\psi_0)$ quand M tend vers M_0.
Or, tous les éléments de cette intégrale s'annulent pour $r = 1$, sauf celui où $\psi = \varphi$, car alors on a : $\frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{0}{0}$.
Cet élément indéterminé donne à l'intégrale une valeur non nulle.
Quelle est donc cette valeur ?

Remarquons d'abord que l'équation $U(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int f(\psi) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\psi$ admet sûrement la solution : $U = 1$.
On a donc toujours :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\psi = 2\pi$$

quels que soient r et φ.
(On s'en convainc d'ailleurs aisément en intégrant cette fonction trigonométrique de ψ entre 0 et 2π.)

Cette remarque faite nous allons faire tendre M vers M_0 et ψ vers ψ_0.
Ajoutons et retranchons à la fois à l'intégrale la quantité constante :

$$\int f(\psi_0) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\psi = 2\pi . f(\psi_0)$$

$$U(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int \left[f(\psi) - f(\psi_0)\right] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\psi + f(\psi_0)$$

On va démontrer que $U(a,b)$ a pour limite $f(\psi_0)$, c.à.d. que l'intégrale précédente a pour limite 0, quand M tend vers M_0 et ψ vers ψ_0.
Or, f étant une fonction continue si on se donne à l'avance le nombre ε,

on peut déterminer un nombre δ tel que dans l'intervalle 2δ la différence entre 2 valeurs quelconques de f soit inférieure en valeur absolue à ε :

$$|\psi_1 - \psi_2| < 2\delta \qquad |f(\psi_1) - f(\psi_2)| < \varepsilon.$$

Traçons un angle au centre égal à 2δ et ayant OM_0 pour bissectrice. Le point M devra certainement entrer dans le secteur 2δ. Prolongeons alors le rayon OM, qui rencontre la circonférence en M' ; de part et d'autre de M' prenons un arc δ ; nous déterminons ainsi un ~~nouveau~~ arc $\alpha\beta$ d'étendue 2δ, et qui contient évidemment M_0. Pour étudier l'intégrale, nous partagerons la circonférence en 2 arcs $\alpha\beta$, l'un s, d'étendue 2δ, l'autre S, comprenant le reste de la circonférence. L'intégrale se divisera en 2 parties de même forme, l'une prise suivant s, l'autre suivant S. Pour la 1e, on a, en vertu de l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \left[f(\psi) - f(\psi_0)\right] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\, d\psi < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_s \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\, d\psi < \varepsilon$$

car l'intégrale prise suivant s est plus petite que l'intégrale prise suivant la circonférence entière : or elle est alors égale à 2π.

Pour la 2e, on a toujours : $\quad \psi - \varphi > \delta \qquad \cos(\psi-\varphi) < \cos\delta$

Donc : $\quad 1 - 2r\cos(\psi-\varphi) + r^2 > 2r - 2r\cos\delta \qquad$ car : $\quad 1 + r^2 > 2r$

et enfin : $$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} < \frac{1-r^2}{2r(1-\cos\delta)}$$ On a alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \left[f(\psi) - f(\psi_0)\right] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\, d\psi < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2G(1-r^2)}{2r(1-\cos\delta)}\int_S d\psi < G\,\frac{1-r^2}{r(1-\cos\delta)}$$

G étant la valeur maximum que prend $f(\psi)$ sur l'arc S ; et d'ailleurs : $\int_S d\psi < \int_C d\psi = 2\pi$. — Mais on peut prendre r suffisamment voisin de 1 pour qu'on ait aussi l'inégalité : $\quad G\,\dfrac{1-r^2}{r(1-\cos\delta)} \leq \varepsilon.$

Dans ces conditions, l'intégrale totale sera inférieure en valeur absolue à 2ε. Ainsi, en prenant δ et $(1-r)$ suffisamment petits, ~~et en prenant~~ on peut prendre M suffisamment voisin de M_0 (dans une direction quelconque : il suffit que M tombe à l'intérieur du quadrilatère curviligne 2δ, $1-r$) pour que l'intégrale en question ait une valeur absolue inférieure à 2ε, c.à.d. qu'elle tend vers 0 quand M tend vers M_0. Donc $V(a,b)$ a pour limite en un point de la circonférence : $f(\psi_0)$ ou bien :

$$\lim_{r=1} V(r,\varphi) = f(\psi)$$

c.q.f.d.

Abordons maintenant le problème de la détermination d'une intégrale ~~le long~~ à l'intérieur d'un contour quelconque le long duquel elle prend des valeurs connues.

Prenons un arc de courbe quelconque AB, et un point du plan $M(a,b)$. Considérons l'intégrale curviligne :

$$\int_c \frac{\cos(r,n)}{r}\,ds$$

prise suivant cet arc, ds étant l'élément d'arc terminé au point P, par exemple, r étant la longueur MP et ~~cos~~ (r,n) l'angle de MP et de la normale PN. On peut considérer cette intégrale comme une fonction de a, b.

Quelle est d'abord la signification géométrique de cette intégrale ? (circulaire)

Joignons M à P, P' extrémités de l'élément d'arc ds ; l'arc PP_1 est égal, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à ds, à : $\cos(r,n)\,ds$. Donc l'angle PMP' a pour expression : $\frac{\cos(r,n)}{r}\,ds$

La somme de ces angles élémentaires est évidemment l'angle sous lequel on voit l'arc AB du point M, cet angle étant évalué avec un signe qui dépend de celui de $\cos(r,n)$ — Comme cette somme est la même quel que soit l'arc qui joint les 2 points A et B, on est sûr que l'intégrale

remplit les conditions d'intégrabilité. Il est facile de le vérifier en la mettant sous la forme régulière : $\int P dx + Q dy$

$$\cos(r,n) = \frac{a-x}{r}\cos\alpha + \frac{b-y}{r}\cos\beta \qquad dx = ds\cos\beta \qquad dy = -ds\cos\alpha$$

$$\int_c \frac{b-y}{r^2}dx + \frac{a-x}{r^2}dy \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{r^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On pourrait encore écrire cette intégrale de manière à mettre en évidence sa propriété d'être une fonction analytique ; en effet : $\pm\frac{\cos(r,n)}{r} = \frac{d\log r}{dn}$ l'intégrale est donc au signe près : $\int_c \frac{d\log r}{dn} ds$

Prenons maintenant cette intégrale le long d'une courbe fermée. Si le point (a,b) est en dehors de la courbe, l'intégrale sera nulle, car elle reste finie à l'intérieur de la courbe. – Si le point (a,b) est à l'intérieur, on ~~et continue~~ pourra prendre l'intégrale le long d'un petit cercle de centre (a,b) et de rayon ρ, sans changer sa valeur. Nous supposons que l'on considère la normale intérieure, de sorte que : $\cos(r,n) = +1$.

L'intégrale sera : $\int_c \frac{ds}{r} = \frac{1}{\rho}\int_c ds = 2\pi$.

Ainsi l'intégrale est une fonction de (a,b) nulle quand (a,b) est à l'extérieur du contour, égale à 2π quand ce point est intérieur au contour.

Ce résultat est géométriquement évident, quand on remarque que l'intégrale représente l'angle sous lequel on voit le contour décrit dans un certain sens qui affecte les arcs d'un certain signe. Quand le point M est extérieur, la somme algébrique des angles est nulle, car ils sont deux à deux égaux et de signes contraires ; les 2 parties du contour se détruisent dans l'intégrale. Quand le point M est intérieur, la somme des angles est 2π. –

La même considération géométrique nous donne encore la valeur de l'intégrale quand le point M est sur la courbe même. Si en M la tangente

à la courbe est unique, l'intégrale aura pour valeur π. Si le point M est un point anguleux, et qu'il y ait 2 tangentes faisant entre elles l'angle α dans lequel soit comprise la courbe, la valeur de l'intégrale sera α.

— Nous allons maintenant étudier l'intégrale plus générale:

$$\int \mu \frac{\cos(r,n)}{r} ds$$

où $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ Posons: angle $(r,n) = \varphi$.

μ est une certaine fonction continue de (a,b); l'intégrale sera une fonction de (a,b) que nous désignerons par V; on aura donc

$$V(a,b) = \int_c \mu \frac{\cos\varphi}{r} ds$$

Nous supposerons dans ce qui suit que le contour considéré est convexe; il peut d'ailleurs avoir plusieurs points saillants ou anguleux.

La fonction V doit éprouver une discontinuité sur le contour, puisque elle est discontinue dans le cas particulier où $\mu = 1$.

Remarquons d'abord qu'elle satisfait à l'équation: $\Delta V = 0$.

En effet, $\frac{\cos\varphi}{r}$ considéré comme fonction de (a,b) satisfait à l'équation de Laplace; car:

$$\frac{\cos\varphi}{r} = -\frac{d\log r}{dn} = \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}$$

Chaque élément de l'intégrale satisfaisant à l'équation, l'intégrale elle-même y satisfait.

Nous allons rechercher les variations de l'intégrale V quand le point $M(a,b)$ traverse le contour C; nous savons qu'elle doit y éprouver une discontinuité. Considérons le point σ sur le contour; de ce point comme centre avec un rayon ρ suffisamment petit décrivons un cercle qui coupe le contour en α, β. Nous allons considérer l'intégrale:

$$W = \int_c \mu \frac{\cos\varphi}{r} ds - \int_c \mu_\sigma \frac{\cos\varphi}{r} ds = \int_c (\mu - \mu_\sigma) \frac{\cos\varphi}{r} ds$$

μ_σ étant la valeur de μ au point σ; c'est une quantité constante

Appelons P le point variable (x,y) qui sert à effectuer l'intégration en parcourant le contour C (tel que $MP = r$, et $\widehat{NPM} = \varphi$) Nous prendrons ρ assez petit pour que lorsque P se trouve sur l'arc $\alpha\beta$, on ait :

$$|\mu - \mu_\sigma| < \varepsilon \qquad \text{quantité fixe donnée à l'avance}$$

Partageons l'intégrale W en 2 intégrales semblables, l'une prise suivant le petit arc $\alpha\beta$, l'autre sur le reste du contour C. La 1e quelle que soit la position du point M, est inférieure en valeur absolue à $2\pi\varepsilon$ car l'intégrale :

$$\int \frac{\cos\varphi}{r}\, ds$$

prise suivant $\alpha\beta$ est dans tous les cas inférieure à 2π. — La 2e est une fonction continue de (a,b) quand M est suffisamment rapproché de σ. —

Décrivons donc un 2e cercle de centre σ et de rayon : $\rho' < \rho$ et supposons que le point M reste dans ce cercle. L'élément restant continu, puisqu'on n'intègre pas sur $\alpha\beta$, l'intégrale reste continue. Donc si l'on prend M aussi voisin qu'on le veut de σ, d'un côté ou de l'autre du contour, on peut rendre la 2e intégrale plus petite que ε en val. abs. On aura donc dans ces conditions : $|W| < (2\pi+1)\varepsilon$ ce qui prouve que la fonction $W(a,b)$ reste continue dans le voisinage de σ : sa limite sera donc la même, que M tende vers σ par l'extérieur ou par l'intérieur.

On distinguera pour V 3 sortes de valeurs pour chaque point σ du contour : V_σ sa valeur sur le contour même ; $V_{\sigma i}$ la limite des valeurs de V quand M tend vers σ par l'intérieur ; $V_{\sigma e}$ la limite des valeurs de V quand M tend vers σ par l'extérieur. — On distinguera les mêmes valeurs pour W, tout en sachant qu'elles sont identiques : $W_{\sigma i} = W_\sigma = W_{\sigma e}$.

Nous allons chercher des relations entre $V_{\sigma i}$, V_σ et $V_{\sigma e}$ pour connaître les discontinuités de la fonction V. Or on a :

$$W_{\sigma i} = V_{\sigma i} - \mu_\sigma \int \frac{\cos\varphi}{r}\,ds = V_{\sigma i} - 2\pi\mu_\sigma \qquad \text{(M étant à l'intérieur)}$$

$$W_\sigma = V_\sigma - \mu_\sigma \int \frac{\cos\varphi}{r}\,ds = V_\sigma - \pi\mu_\sigma \qquad (\sigma \text{ étant un point ordinaire})$$

$$W_{\sigma e} = V_{\sigma e} - \mu_\sigma \int \frac{\cos\varphi}{r}\,ds = V_{\sigma e} \qquad \text{(M étant à l'extérieur)}$$

On en conclut immédiatement les 2 relations :

$$V_{\sigma e} = V_\sigma - \pi\mu_\sigma \qquad\qquad V_{\sigma i} = V_\sigma + \pi\mu_\sigma .$$

Si l'on fait $\mu = 1$, on sait que $V_\sigma = \pi$, et on retrouve les résultats précédents. — Telles sont les formules qui expriment les discontinuités de la fonction V sur le contour C.

Nous allons maintenant aborder le problème de Dirichlet, c.à.d. la recherche de la fonction qui satisfait l'équation de Laplace et qui prend sur un contour une suite de valeurs données. Nous suivrons pour le résoudre la méthode de Neumann en la simplifiant un peu. Nous ne l'avons résolu précédemment (pages 54-58) que dans un cas particulier (contour circulaire) et par un procédé peu rigoureux.

Lemme I. Posons, pour simplifier l'écriture : $I_\sigma^\alpha = \int_\alpha \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$

intégrale prise par rapport au point σ le long de l'arc α.

Étant donné un contour fermé C, partageons-le en 2 arcs (ou sommes d'arcs) α et β, tels qu'on ait : $\alpha + \beta = C$

Prenons les intégrales : I_σ^α, $I_{\sigma_1}^\beta$, σ étant un point quelconque de l'arc α, et σ_1 un point quelconque de l'arc β. — Considérons la somme :

$$\left| I_\sigma^\alpha + I_{\sigma_1}^\beta \right|$$

Elle doit rester inférieure à une certaine limite car si α était le contour entier, I_σ^α serait π.

En effet, $\left| I_\sigma^\alpha \right| \leq \pi$

De même : $\left|I^\beta_{\sigma_1}\right| \leq \pi$ Donc : $\left|I^\alpha_\sigma + I^\beta_{\sigma_1}\right| \leq 2\pi$.

Ainsi la quantité : $\frac{1}{2\pi}\left[I^\alpha_\sigma + I^\beta_{\sigma_1}\right]$ est inférieure ou égale à 1.

Elle est d'autre part plus grande qu'une quantité λ supérieure à 0. En effet, il suffit pour cela que sa valeur minimum soit plus grande que 0. Or cette valeur minimum ne pourrait être nulle que si tous les éléments des 2 intégrales étaient nuls — Cela arrive dans le cas d'un quadrilatère, si l'on prend pour σ, σ_1 2 sommets opposés, pour α l'ensemble des 2 côtés issus de σ, pour β l'ensemble des 2 côtés issus de σ_1. On a alors :

$$I^\alpha_\sigma + I^\beta_{\sigma_1} = 0$$

car $\cos\varphi$ est constamment nul (La somme des angles sous lesquels on voit α de σ et β de σ_1 est nulle.) — Mais cela ne peut avoir lieu que dans le cas tout à fait particulier où les tangentes au contour passent toutes par 2 points, et où on choisit ces 2 points pour σ, σ_1 — Pour une courbe convexe ordinaire on aura toujours : $\frac{1}{2\pi}\left[I^\alpha_\sigma + I^\beta_{\sigma_1}\right] > \lambda > 0$.

Donc, en exceptant le cas d'un contour triangulaire ou quadrangulaire, on a toujours :

$$0 < \lambda < \frac{1}{2\pi}\left[I^\alpha_\sigma + I^\beta_{\sigma_1}\right] \leq 1$$

Lemme II.

— Considérons d'autre part l'intégrale : $V_\sigma = \frac{1}{\pi}\int_C \mu \frac{\cos\varphi}{r}\, ds$ prise suivant un contour convexe par rapport à un point σ de ce contour. Nous allons établir une inégalité fondamentale relative au maximum et au minimum de cette fonction.

Soit M le maximum, m le minimum de la fonction μ — Partageons l'intervalle (M, m) en 2 intervalles égaux : $\left(M, \frac{M+m}{2}\right)$ $\left(\frac{M+m}{2}, m\right)$

Il y aura une région du contour où μ, fonction de (a, b) sur ce contour, tombera dans le 1er intervalle, et une autre région où μ tombera dans le 2e. Soient α, β ces 2 régions (arcs ou sommes d'arcs) on conviendra d'adjoindre

à l'une d'elles les points où $\mu = \frac{M+m}{2}$. On aura alors: $\alpha + \beta = C$.

$$\pi V_\sigma = \int_\alpha \mu \frac{\cos\varphi}{r} ds + \int_\beta \mu \frac{\cos\varphi}{r} ds$$

Dans les 2 intégrales remplaçons μ par son maximum, nous les rendrons évidemment plus grandes: donc

$$\pi V_\sigma < M I_\sigma^\alpha + \frac{M+m}{2} I_\sigma^\beta$$

Remplaçons μ par son minimum dans chaque intégrale; nous les rendons évidemment plus petites; donc

$$\pi V_\sigma > \frac{M+m}{2} I_\sigma^\alpha + m I_\sigma^\beta$$

Or on sait que $\quad I_\sigma^\alpha + I_\sigma^\beta = \pi \quad$ On a donc les 2 inégalités:

$$m + \frac{M-m}{2\pi} I_\sigma^\alpha < V_\sigma < M - \frac{M-m}{2\pi} I_\sigma^\beta$$

Pour un autre point quelconque σ_1 du contour C, on aurait de même:

$$m + \frac{M-m}{2} I_{\sigma_1}^\alpha < V_{\sigma_1} < M - \frac{M-m}{2\pi} I_{\sigma_1}^\beta$$

En combinant 2 inégalités de sens contraire, on a l'inégalité:

$$V_{\sigma_1} - V_\sigma < M - m - \frac{M-m}{2\pi}\left(I_{\sigma_1}^\beta + I_\sigma^\alpha\right) = (M-m)\left[1 - \frac{1}{2\pi}\left(I_{\sigma_1}^\beta + I_\sigma^\alpha\right)\right]$$

Or on a vu que $\quad \frac{1}{2\pi}\left(I_{\sigma_1}^\beta + I_\sigma^\alpha\right) > \lambda > 0 \quad$ Donc:

$$V_{\sigma_1} - V_\sigma < (M-m)(1-\lambda)$$

ou, en posant $\quad 1-\lambda = \rho; \quad (0 < \rho < 1)$

$$V_{\sigma_1} - V_\sigma < (M-m)\rho.$$

Les valeurs de V_σ étant comprises entre des limites finies, V_σ a un certain maximum M_1 et un certain minimum m_1 sur la courbe; prenons pour σ_1 le point du maximum et pour σ le point du minimum:

$$M_1 - m_1 < (M-m)\rho$$

Telle est la relation remarquable qui existe entre les maximums et minimums de la fonction μ et de la fonction V_σ sur le contour. L'oscillation de la fonction V_σ est assurément moindre que l'oscillation de la fonction μ.

Ces remarques faites, nous pouvons résoudre la question posée :

Problème. Étant donné un contour convexe pouvant avoir des angles saillants (ni triangle ni quadrilatère), on demande de déterminer la fonction qui satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur de ce contour et qui prend sur le contour une suite continue de valeurs données.

Pour cela, il faut que la limite des valeurs que prend la fonction V à l'intérieur du contour soit égale à V_σ valeur en un p. σ du contour, quand le point (a, b) se rapproche indéfiniment du point s.

Considérons l'intégrale : $V_1(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r}(V - V_\sigma)\, ds$

prise le long du contour fermé, σ étant un point quelconque mais fixe de ce contour. — La valeur de cette intégrale nous est connue : c'est une fonction continue de (a, b) pour le point σ, que le point M s'en rapproche par l'intérieur ou par l'extérieur. V_1 est donc une fonction déterminée dans tout le plan. En particulier, sa valeur en dehors du contour fermé est

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r} V\, ds$$

car alors :
$$\int \frac{\cos\varphi}{r} V_\sigma\, ds = V_\sigma \int \frac{\cos\varphi}{r}\, d\sigma = 0 .$$

Cette combinaison servant à définir une fonction continue dans tout le plan, répétons-la sur V_1 :

$$V_2(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r}(V_1 - V_{1\sigma})\, ds$$

La fonction V_2 sera encore continue dans tout le plan, et sa valeur en dehors du contour sera : $-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r} V_1\, ds$

En continuant la même combinaison, on obtiendra une suite indéfinie

de fonctions de la forme : $U_n(a,b) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r}\left[U_{n-1} - U_{(n-1)\sigma}\right] ds$
toutes continues dans le plan et en particulier sur le contour C. Cette série de fonctions va nous donner la solution du problème.

Soient M et m le maximum et le minimum de U quand le point $\sigma(x,y)$ parcourt le contour C ; soient M_1, m_1 le maximum et le minimum de U_1. — On a les relations : $m < U < M \quad m < U_\sigma < M$

~~$|U-U_\sigma| < M-m$~~ ~~$|U-U_\sigma| > m-M$~~ d'où : $\left|U-U_\sigma\right| < 2(M-m)$

Mais comme U_1 contient 2π au dénominateur, on peut supprimer le facteur 2, pour rentrer dans les conditions du lemme précédemment démontré ; on aura donc : $M_1 - m_1 < (M-m)\rho \quad 0<\rho<1.$

On aura de même : $M_2 - m_2 < (M_1-m_1)\rho < (M-m)\rho^2$

et en général : $M_n - m_n < (M_{n-1}-m_{n-1})\rho < (M-m)\rho^n$

M_n et m_n étant le maximum et le minimum de U_n sur le contour.

Ainsi l'oscillation de la fonction U_n sur le contour tend vers 0.

Nous allons déterminer la limite supérieure de U_n, c.à.d. une valeur supérieure de M_n.

Considérons la valeur $U_{n\sigma}$ de la fonction $U_n(a,b)$ pour le point σ.

On sait qu'elle est égale à : $-\lim \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds$

quand le point (a,b) tend vers le point σ par l'extérieur. Soit A ce point (a,b). Menons les tangentes $A\alpha$, $A\beta$ au contour, et partageons l'intégrale en 2 parties correspondant aux 2 arcs de courbe $\alpha\beta$; on va chercher la limite supérieure de leur somme qui est $U_{n\sigma}$.

Considérons le petit arc $\alpha\beta$, où $\cos\varphi < 0$.

$U_{n-1} < M_{n-1}$ Donc, sur cet arc :

$-\frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1} < -\frac{\cos\varphi}{r} M_{n-1}$

et, en intégrant :

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds < -\frac{M_{n-1}}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r}\, ds \qquad \text{Or: } -\int \frac{\cos\varphi}{r}\, ds = \Omega$$

Ω étant l'angle $\alpha A \beta$, cette intégrale étant prise sur l'arc $\alpha\beta$; donc:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\beta} \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds < \frac{M_{n-1}}{2\pi}\,\Omega$$

Passons au grand arc $\alpha\beta$, où $\cos\varphi > 0$. $\qquad U_{n-1} > m_{n-1}$

et sur cet arc: $\quad -\frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1} < -\frac{\cos\varphi}{r} m_{n-1}$ $\qquad$ Intégrons:

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds < -\frac{m_{n-1}}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r}\, ds \qquad \text{Or: } +\int \frac{\cos\varphi}{r}\, ds = \Omega$$

Ω étant le même angle avec le même signe, l'intégrale étant prise sur l'arc $\alpha\gamma\beta$ en sens inverse. Donc: $-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\beta\gamma} \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds < -\frac{m_{n-1}}{2\pi}\,\Omega$

et, en faisant la somme:

$$\left| -\frac{1}{2\pi}\int_c \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds \right| < \frac{\Omega}{2\pi}\left[M_{n-1} - m_{n-1}\right]$$

limite supérieure essentiellement positive. Faisons tendre le p.t A vers le p.t σ: le 1er membre tendra vers $U_{n\sigma}$; Ω tendra en général vers π, ou, si le p.t σ est un point anguleux saillant, vers un certain angle $\alpha < \pi$; donc dans tous les cas on peut dans la limite supérieure remplacer Ω par π:

$$\left|U_{n\sigma}\right| < \frac{1}{2}\left[M_{n-1} - m_{n-1}\right] < \frac{M-m}{2}\,\rho^{n-1}$$

On voit que la limite supérieure de $U_{n\sigma}$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, c.à.d. que la série: $U_\sigma + U_{1\sigma} + U_{2\sigma} + \ldots\ldots + U_{n\sigma} + \ldots\ldots$ est absolument convergente; donc la série: $U + U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n + \ldots\ldots$ est absolument convergente sur le contour donné.

Cette démonstration fournit immédiatement la solution du problème:

$$V(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r}\left[U + U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n + \ldots\right] ds$$

intégrale de la forme étudiée plus haut, où l'on a remplacé μ par la série convergente. Il est aisé de voir que cette fonction V satisfait à l'équation de Laplace. Il reste à démontrer que, de plus, elle tend vers U_σ quand le point (a, b) tend vers le point σ du contour (par l'intérieur.)

Rappelons la formule établie plus haut: $V_{is} - V_{es} = \mu_\sigma = U_\sigma + U_{1\sigma} + \ldots\ldots + U_{n\sigma} + \ldots$

Il s'agit de démontrer que: $V_{\sigma i} = U_\sigma$

ou que: $-V_{\sigma e} = U_{1\sigma} + U_{2\sigma} + \ldots\ldots + U_{n\sigma} + \ldots\ldots$

Or on a: $U_{1\sigma} = -\lim \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r} U\, ds$ $\qquad U_{2\sigma} = -\lim \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r} U_1\, ds$

et généralement: $U_{n\sigma} = -\lim \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r} U_{n-1}\, ds$

Donc: $U_{1\sigma} + U_{2\sigma} + \ldots\ldots + U_{n\sigma} + \ldots = -\lim \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r} \left[U + U_1 + \ldots + U_n + \ldots \right] ds = -V_{\sigma e}$.

ce qui démontre que: $V_{\sigma i} = U_\sigma$

et que l'intégrale $V(a, b)$ est bien la solution du problème.

— Nous venons de résoudre le problème pour l'intérieur d'un contour fermé; on pourrait avoir à le résoudre pour la partie du plan extérieure au contour. Dans ce cas, il faut imposer à la fonction cherchée une certaine condition pour les points situés à l'infini, par exemple l'assujettir à prendre à l'infini une valeur constante, d'ailleurs indéterminée, quelle que soit la direction dans laquelle le point s'éloigne; autrement, le problème ne serait pas complètement déterminé (v. page 115.)

On peut traiter ce nouveau problème directement; on peut aussi le ramener simplement au précédent par une transformation analogue à la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Mettons la fonction de x, y sous la forme: $f(z) = V + iU$

z étant une variable complexe définie par $z = x + iy$

Faisons le changement de variable: $Z = \frac{1}{z}$. $\qquad Z = X + iY$

$X + iY = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $\qquad$ ou: $X = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad Y = \frac{-y}{x^2+y^2}$

Ce changement de variable revient, dans le plan, à une transformation par rayons vecteurs réciproques par rapport à l'origine, suivie d'une inversion par symétrie de la figure autour de l'axe Ox.

Soit $V(x, y)$ la fonction cherchée, qui doit satisfaire à l'équation de Laplace ~~et prendre~~ être continue en dehors du contour fermé et prendre sur ce contour une suite de valeurs données. Effectuons le changement de variable précédent : à la courbe C correspondra dans la transformation la courbe fermée C' ; aux points du plan extérieurs à C correspondront les points du plan intérieurs à C'. D'ailleurs $f(\frac{1}{z})$ reste analytique et V continue de satisfaire à l'équation de Laplace. Le problème extérieur au contour C se ramène donc sans difficulté au problème intérieur au contour C', et admet la même solution.

— Nous avons supposé que la fonction donnée V était continue sur tout le contour. Examinons maintenant le cas où elle ne serait pas continue, et supposons qu'en un nombre limité de points du contour, elle passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie. Si l'on développe la courbe suivant Ox, la fonction V considérée comme fonction de l'arc s deviendra :

$y = f(x)$ $\qquad V = f(s)$

Soient α, β, γ les points de discontinuité, tels qu'on ait :

$\lim f(\alpha + \varepsilon) \gtrless \lim f(\alpha - \varepsilon)$ etc.

de sorte que pour α, β, γ la fonction n'ait pas de valeur définie ; on dira qu'elle éprouve en α le saut AA', en β le saut BB', en γ le saut CC', et ainsi de suite. Reportons maintenant ces discontinuités sur la courbe C. On peut les faire disparaître et ramener ainsi la fonction V aux conditions du problème précédent —

Considérons en effet la fonction : $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Il est aisé de voir qu'elle satisfait à l'équation de Laplace ; d'ailleurs c'est la partie imaginaire de $\log z$.

Il en est de même de la fonction :

$$\operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

qui n'en diffère que par un changement d'origine. Prenons pour le point fixe $(x_0 y_0)$ le point α où la fonction V éprouve une discontinuité, et supposons que ce soit un point ordinaire de la courbe.

α

β

γ

La fonction : $\operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$ est bien définie à l'intérieur du contour, dès qu'on a choisi une de ses déterminations en un point quelconque, puisque l'on ne tourne pas autour de $\alpha(x_0, y_0)$. Or elle éprouve une discontinuité sur le contour quand elle passe en α : en effet, avant α (en tournant dans le sens positif) elle a une certaine valeur, et après α elle a une valeur différente de π, puisque $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ a changé de signe en α. Pour savoir quel est le signe de cette différence π dont elle a sauté en tournant dans le sens positif, imaginons qu'on évite le point α par un demi-cercle infiniment petit : le sens sera négatif sur ce demi-cercle, de sorte que la fonction $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ aura diminué en passant d'un côté à l'autre de α : le saut est de $-\pi$.

Or la fonction V éprouve aussi une discontinuité en α, dont le saut est a.

Pour détruire cette discontinuité, il suffit de retrancher de V la fonction $\operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$ avec un coefficient convenable ; la fonction :

$$U + \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

sera continue pour le point α, et d'ailleurs elle satisfait à l'équation de Laplace.

On compensera de même les discontinuités b, c éprouvées aux points $\beta(x_1 y_1)$, $\gamma(x_2 y_2)$, et on aura la fonction :

$$V = U + \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0} + \frac{b}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-y_1}{x-x_1} + \frac{c}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-y_2}{x-x_2}$$

continue sur le contour C et satisfaisant à l'équation de Laplace. Pour en déduire la valeur de V en un point quelconque (x, y) il suffira d'en retrancher les «arctang» qu'on sait calculer.

— Nous avons supposé que le contour considéré était convexe (en excluant le cas du triangle et du quadrilatère) Pour traiter le même problème dans le cas d'un contour quelconque, on peut recourir à une autre méthode (méthode de continuation des fonctions par l'extension des contours, de M. Schwarz) Voici en quoi consiste cette méthode:

Soient 2 contours convexes qui empiètent l'un sur l'autre; si l'on sait résoudre le problème pour chacun d'eux, on pourra déterminer une fonction qui prendra les mêmes valeurs dans l'aire commune aux 2 contours, et par conséquent le problème sera résolu dans l'aire totale comprise par les 2 contours. On peut, en continuant de la même manière, arriver à déterminer une fonction univoque à l'intérieur de contours non convexes —

— Avant d'exposer la méthode de M. Schwarz pour la continuation des fonctions, il nous faut établir 2 remarques préliminaires.

— Considérons un contour convexe divisé en 2 parties I, II par les points A, B. Assignons à la fonction V la valeur 0 sur l'arc I, la valeur 1 sur l'arc II; les points A, B sont des points de discontinuité de la fonction; le saut en A est −1:

$a = -1.$

D'après ce que nous avons dit, la fonction:

$$V = U + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

n'a plus de discontinuité en A: donc V_A est une valeur unique bien déterminée. — Les 2 valeurs de V en A seront, en appelant α l'angle de la tangente AT avec Ox ($\operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}$)

$V_A - \frac{1}{\pi}\alpha = 0$ $\qquad$ $V_A - \frac{1}{\pi}(\alpha - \pi) = 1$

car la valeur de V sur le contour est : $V = V - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$

Quelle est la valeur de V quand le p. (x,y) tend vers A par l'intérieur du contour ? Supposons qu'il décrive un arc de courbe aboutissant en A et non tangent au contour.

Soit θ l'angle de la tangente à cet arc en A avec AT tangente au contour.

A T θ

On aura, quand (x,y) tendra vers A suivant l'arc de courbe :

$$\lim V = V_A - \frac{1}{\pi}(\alpha - \theta) = \frac{\theta}{\pi}. \qquad 0 < \theta < \pi$$

Ainsi la valeur limite de V à l'intérieur du contour varie avec l'angle de la tangente à l'arc de courbe en A ; elle passe de 0 à 1 quand θ passe de 0 à π. Donc à l'intérieur du contour, au voisinage du p. A, $\lim V < 1$.

Cherchons maintenant quelle est la valeur de V en un p. quelconque de l'intérieur du contour, joignons AB par un arc de courbe quelconque non tangent au contour. On va prouver que sur cet arc on a toujours :

$$V \leqq q < 1.$$

En effet dans le voisinage de A, B, on vient de voir que : $V < 1$.
Si en un point quelconque de l'arc V prenait une valeur supérieure à 1, elle aurait un maximum à l'intérieur du contour, ce qui est impossible.
Supposons qu'elle ait la valeur 1 en un point C de la courbe ; décrivons un cercle autour de C ; il faut que la valeur de V soit constamment 1 sur ce cercle, car la valeur au centre est la moyenne des valeurs sur la circonférence, et on vient de voir que ces valeurs ne peuvent dépasser 1 :

$$V_c = \frac{1}{2\pi\rho}\int V\,ds$$

Mais on peut étendre ce cercle jusqu'au voisinage de A ou de B, en prenant ρ suffisamment grand et avoir la valeur 1 en un point aussi voisin

qu'on voudra de A ou de B sur la courbe, ce qui est impossible; donc V reste toujours inférieur à 1 à l'intérieur du contour.

— Supposons maintenant que sur la partie I de ce même contour la fonction V ait la valeur 0, et qu'elle ait sur la partie II une suite de valeurs quelconques dont le maximum est G. On va prouver que la valeur absolue de la fonction sur l'arc ACB ~~est toujours inférieure à~~ ne dépasse pas Gq:

$$|V| \leq Gq$$

Appelons u la fonction précédemment étudiée qui prend la valeur 0 sur I et la valeur 1 sur II, et considérons la fonction: $V + Gu$

Elle est nulle sur la partie I du contour; sur la partie II, elle est positive: car elle est $V+G$, et on a sur ce contour: $|V| \leq G$.

Elle est donc toujours positive dans l'intérieur du contour, car autrement on aurait un minimum, ce qui est impossible. On peut donc écrire

$$V + Gq + G(u-q) > 0$$

sur l'arc ACB. Or on a: $u - q < 0$. Donc, sur le même arc:

$$V + Gq > 0 \qquad V > -Gq.$$

Considérons d'autre part la fonction: $V - Gu$

Elle est nulle sur la partie I, et négative sur la partie II, car elle est alors $(V-G)$ et on a sur ce contour: $|V| < G$.

Donc elle est constamment négative à l'intérieur, sans quoi elle aurait un maximum, ce qui est impossible. On peut donc écrire:

$$V - Gq - G(u-q) < 0$$

sur l'arc ACB; donc: Or on a: $u - q < 0$

$-G(u-q) > 0$ Il faut qu'on ait sur le même arc: $V - Gq < 0$

ou: $V < Gq$

On a donc à la fois sur ACB: $-Gq < V < Gq$

ou: $|V| < Gq$ c.q.f.d.

Nous allons maintenant exposer le procédé alterné de M. Schwarz pour la continuation des fonctions d'un contour à l'autre.

Considérons 2 contours simples convexes enfermant une aire commune. Leurs points d'intersection les divisent chacun en 2 parties ; le 1er en l'arc extérieur a et l'arc intérieur α ; le 2e en l'arc extérieur b et l'arc intérieur β. On va prouver que si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour chacun de ces 2 contours convexes on peut le résoudre pour le contour concave formé des arcs extérieurs a, b.

a b 1 2 α β

On désignera par u les fonctions définies sur le 1er contour $a\alpha$, par v les fonctions définies sur le 2e contour $b\beta$ – On se donne sur les arcs extérieurs a b une suite de valeurs. On détermine ensuite la fonction u_1 qui prend la valeur 0 sur α et les valeurs données sur a. Cette fonction sera définie dans le contour 1 ; elle prendra ensuite de valeurs déterminées sur β – On détermine alors la fonction v_1 qui prend sur β les mêmes valeurs que u_1 et sur a les valeurs données. Cette fonction v_1 définie dans le contour 2 prend certaines valeurs sur α. On détermine ensuite u_2 qui prend ces mêmes valeurs sur α et les valeurs données sur a – Puis on détermine v_2 qui prend sur β les mêmes valeurs que u_2 et sur b les valeurs données ; et ainsi de suite ; l'opération peut se poursuivre indéfiniment, et on obtient une double suite infinie de fonctions :

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \; \ldots \ldots \; u_n$$
$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \; \ldots \ldots \; v_n$$

définies respectivement dans chacun des 2 contours $a\alpha$ et $b\beta$. On va démontrer que ces 2 suites ont des limites U, V, que les 2 fonctions U, V

prennent les mêmes valeurs sur α, β et coïncident à l'intérieur du contour $\alpha\beta$, et que, puisqu'elles se raccordent complètement sur la partie commune aux 2 aires, elles forment la solution cherchée, et représentent ensemble une fonction univoque déterminée dans tout le contour ab et satisfaisant à l'équation de Laplace.

Remarquons que $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, ... $u_n v_n$ ont les mêmes valeurs sur l'arc β, et que $u_2 v_1$, $u_3 v_2$, ... $u_n v_{n-1}$ ont les mêmes valeurs sur l'arc α.

On a donc : $(u_3 - u_2)$ sur $\alpha = (v_2 - v_1)$ sur α.

Or $(v_2 - v_1)$ est une fonction qui s'annule sur b, et prend certaines valeurs non nulles sur β ; donc si q est un facteur numérique inférieur à 1, on a :

$$(v_2 - v_1) \text{ sur } \alpha < q \times \text{maximum de } (v_2 - v_1) \text{ sur } \beta.$$

en appliquant le lemme précédent au contour $b\beta$ traversé par α.

Or on a : $(v_2 - v_1)$ sur $\beta = (u_2 - u_1)$ sur β

Mais $(u_2 - u_1)$ est une fonction qui s'annule sur a, et prend certaines valeurs sur α ; posons : M = maximum de $(u_2 - u_1)$ sur α.

on devra avoir : $(u_2 - u_1)$ sur $\beta < qM$

et en rapprochant les inégalités et identités précédentes :

$$(u_3 - u_2) \text{ sur } \alpha < q^2 . M$$

On aurait de même :

$$(u_4 - u_3) \text{ sur } \alpha < q^2 (u_3 - u_2) \text{ sur } \alpha < q^4 . M$$

et ainsi de suite :

- - - - - - - - - - - - - - -

$$(u_n - u_{n-1}) \text{ sur } \alpha < q^{2(n-2)} M$$

Ainsi la différence : $u_n - u_{n-1}$ est inférieure au terme correspondant d'une progression géométrique ; et comme on a identiquement :

$$u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots\ldots + (u_n - u_{n-1})$$

on voit que u_n est égal à la somme d'une série convergente quand n croît indéfiniment. Donc u_n a une limite bien déterminée sur α ; on posera :

lim u_n sur $\alpha = V$ On prouverait de même: lim v_n sur $\beta = V$.
D'ailleurs, en adjoignant aux valeurs données sur a les valeurs que prend V sur α, on détermine une fonction uniforme et continue à l'intérieur du contour $a\alpha$; de même, les valeurs données sur b jointes à celles que prend V sur β déterminent une fonction uniforme et continue à l'intérieur du contour $b\beta$. Nous les appellerons toujours V et V.
Or ces 2 fonctions coïncident sur α et sur β: en effet, sur α, V et V sont les limites de u_n, v_n qui sont égales; et sur α, ce sont les limites de u_n, v_{n-1} qui sont aussi égales — Comme ces 2 fonctions sont égales sur le contour $\alpha\beta$, elles sont identiques à l'intérieur de ce contour. Ainsi elles coïncident dans toute l'aire commune aux 2 contours; on peut donc dire que V prolonge la fonction V hors du contour $a\alpha$, et que V prolonge V hors du contour $b\beta$. Ces 2 fonctions qui se continuent l'une l'autre résolvent le problème de Dirichlet pour le contour extérieur ab.
Cette méthode permet de résoudre le problème de Dirichlet dans bien des cas que nous avons dû écarter jusqu'ici.
Et d'abord elle s'applique au cas du triangle et du quadrilatère; on n'aura qu'à diviser ces figures en 2 aires à contour convexe empiétant l'une sur l'autre, et à leur appliquer le procédé alterné, pour définir une fonction univoque à leur intérieur.

Plus généralement, on pourra résoudre le problème de Dirichlet pour tout polygone même concave; par exemple on décomposera le quadrilatère concave en 2 triangles auxquels on appliquera le procédé alterné.

Le théorème de Dirichlet trouve une application importante dans le problème de Riemann. Mais auparavant il faut ~~définir~~ la représentation prouver que toute fonction analytique donne naissance à une conforme

Définissons ce qu'on entend par représentation conforme.

Soient 2 plans contenant 2 systèmes d'axes coordonnés Oxy, OXY. ~~Cherchons une transformation de figure d~~ Pour transformer une figure du 1er en une figure du 2e, on posera 2 équations de la forme :

$$X = f(x,y) \qquad Y = \varphi(x,y)$$

Cherchons une transformation qui conserve les angles, c.à.d. telle que 2 courbes quelconques d'un des plans se coupent sous le même angle que les 2 courbes correspondantes dans l'autre plan. Il est facile de trouver à quelles conditions cela aura lieu.

Considérons le triangle curviligne abc dans le 1er et le triangle correspondant ABC dans le 2e ; a et A sont fixes, b, c et B, C tendent vers a et A sur les courbes fixes dont A et a sont les points d'intersection.

y b a c O x

Y C A B O X

Ces 2 triangles infiniment petits sont semblables, puisque leurs angles ne diffèrent que d'infiniment petits ; on a donc une égalité approchée, qui devient rigoureuse à la limite :

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$$

Analytiquement, cela revient à dire que le rapport : $\dfrac{dX^2 + dY^2}{dx^2 + dy^2}$ a la même valeur en A, a sur la courbe AB, ab et sur la courbe AC, ac, c.à.d. qu'il est constant en A, a pour toutes les courbes issues de ce point ; il ne dépend donc que de x, y, et on a :

$$dX^2 + dY^2 = m(dx^2 + dy^2) \qquad m \text{ étant fonction de } x, y.$$

Telle est la condition nécessaire ; elle est aussi suffisante : car si elle est remplie les 2 triangles infiniment petits seront semblables, et par conséquent leurs angles seront égaux, c.à.d. que la représentation X, Y définie par les équations est conforme. — La question revient donc à trouver 2 fonctions $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$

telles que le rapport : $\frac{dX^2 + dY^2}{dx^2 + dy^2}$ soit fonction de x, y seulement.

Or on peut écrire en se servant du symbolisme imaginaire :

$$(dX + i dY)(dX - i dY) = m(dx + i dy)(dx - i dy)$$

Les 2 membres sont des formes quadratiques, et l'on doit avoir en conséquence soit : $\frac{dX + i dY}{dx + i dy} = \mu(x, y)$ soit : $\frac{dX - i dY}{dx - i dy} = \mu'(x, y)$

ces 2 relations étant d'ailleurs équivalentes. Elles signifient que $(X + iY)$ a une dérivée unique par rapport à $(x + iy)$, et que cette dérivée ne dépend que de la position du point (x, y) ; c.à.d. que $(X + iY)$ est une fonction analytique de $(x + iy)$.

Ainsi, pour avoir une transformation qui conserve les angles, il faut et il suffit qu'on connaisse une fonction analytique de la variable complexe.

Posons : $z = x + iy$ $Z = X + iY$ On doit avoir : $Z = f(z)$

et cette équation complexe où f est fonction analytique, traduit une représentation conforme.

Le problème de Riemann consiste à faire correspondre, par une transformation conforme, un cercle à une aire convexe quelconque, d'une manière uniforme, c.à.d. de telle sorte que chaque point de l'une des aires corresponde à un point différent de l'autre. — Mais avant d'en aborder la solution, il est nécessaire de rappeler les propriétés fondamentales des séries dont les termes sont fonctions d'une variable.

— Il nous faut rappeler ici les propriétés fondamentales des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes d'une variable :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots$$

1er Théorème d'Abel : Si la série précédente est convergente pour $x = x_0$, elle sera convergente pour toute valeur $|x| < |x_0|$.

Nous désignerons dans la suite les valeurs absolues par de grandes lettres.

Plus généralement, quand on a : $A_n X_0^n < M$

M nombre positif fixe, la série est convergente pour tout $X < X_0$.

En effet, considérons la série obtenue en remplaçant chaque terme par sa valeur absolue : $A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots\cdots + A_n X^n + \cdots$

Remplaçons-y A_n par la quantité plus grande : $\dfrac{M}{X_0^n}$:

$$M + M\frac{X}{X_0} + M\frac{X^2}{X_0^2} + \cdots\cdots + M\left(\frac{X}{X_0}\right)^n + \cdots$$

la série ainsi obtenue est convergente pour $X < X_0$, car on a alors une progression géométrique de raison $\frac{X}{X_0}$ multipliée par M, n. fini : donc la série donnée est convergente pour toute valeur $|x| < |x_0|$.

Soit l la plus grande valeur positive qui, attribuée à x, rend la série convergente ; la série sera convergente dans tout l'intervalle $(-l, +l)$, sauf peut-être pour $-l$. Ce sera donc une fonction définie de x dans l'intervalle linéaire $(-l, +l)$ que nous appellerons $F(x)$.

On va maintenant prouver que cette fonction de x a dans le même intervalle une dérivée qui est la série de même forme :

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

On montrera d'abord que cette dernière série est convergente dans l'intervalle $(-l, +l)$ non compris ses extrémités. Prenons donc : $0 < x_0 < l$,

x_0 étant d'ailleurs aussi voisin de l qu'on voudra. La série :

$$A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + \ldots\ldots + A_n x_0^n + \ldots\ldots$$

est convergente, et l'on a : $A_n x_0^n < M$ nombre positif fixe.

On va prouver que : $A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots\ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots\ldots$

est convergente pour tout $|x| < |x_0|$. Remplaçons en effet A_n par la quantité plus grande $\frac{M}{x_0^n}$:

$$\frac{M}{x_0} + 2\frac{MX}{x_0^2} + 3\frac{MX^2}{x_0^3} + \ldots\ldots + n\frac{MX^{n-1}}{x_0^n} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{M}{x_0}\left[1 + 2\frac{X}{x_0} + 3\frac{X^2}{x_0^2} + \ldots\ldots + n\left(\frac{X}{x_0}\right)^{n-1} + \ldots\ldots\right.$$

On sait que la série : $1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots\ldots + n\alpha^{n-1}$

est convergente pour : $\alpha < 1$. Donc la série considérée est convergente pour tout $|x| < |x_0| < l$; par conséquent, dans l'intervalle $(-l, +l)$ non compris les extrémités, elle représente une fonction continue comme la série primitive ; soit $f(x)$ cette nouvelle fonction. Reste à savoir si $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Pour cela, il faut d'abord savoir si l'on peut intégrer $f(x)$.

Lemme. Étant donné une série de fonctions de x :

$$\varphi(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots + u_n(x) + \ldots\ldots$$

on peut l'intégrer en intégrant chacun de ses termes dans l'intervalle (α, β) si dans cet intervalle elle est uniformément convergente.

Définition. Une série est dite uniformément ~~convergente~~ dans l'intervalle (α, β) lorsqu'on peut prendre n assez grand pour que le reste de la série, après le n^e terme, soit en valeur absolue inférieur à un nombre quelconque positif ε pour toute valeur de x comprise entre α et β.

Prenons donc n assez grand pour que le reste $R_n(x) < \varepsilon$
pour les valeurs de x telles que : $\alpha < x < \beta$.
On pourra intégrer la somme des $(n+1)$ termes en intégrant chacun d'eux :

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx + \dots + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\,dx$$

Or : $\int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\,dx < \varepsilon(x_1 - x_0)$

Comme ε est aussi petit qu'on veut, la série des intégrales est convergente et sa limite est la valeur de $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx$.

Cela posé, la série $f(x)$ est uniformément convergente dans un intervalle compris entre $-l$ et $+l$. Considérons en effet la série des valeurs absolues :

$$A_1 + 2A_2 x_0 + 3A_3 x_0^2 + \dots + nA_n x_0^{n-1} + \dots$$

où : $0 < x_0 < l$. On peut prendre n assez grand pour que cette série à termes invariables ait un reste inférieur à ε ; alors la série à termes variables : $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$ sera uniformément convergente entre $-x_0$ et $+x_0$, compris entre $-l$ et $+l$, mais d'ailleurs aussi voisins qu'on veut de ces limites. On pourra donc intégrer cette série, en vertu du lemme précédent :

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = F(x)$$

en prenant a_0 pour constante d'intégration ; donc $f(x) = F'(x)$. c q f d

Ainsi la série proposée $F(x)$ a des dérivées successives en nombre infini, qui sont des séries de même forme qu'elle, uniformément convergentes dans tout intervalle compris entre $-l$ et $+l$.

— Considérons maintenant une fonction V satisfaisant à l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$. Soit un cercle de centre O et de rayon R ; on a vu que le problème de Dirichlet a dans ce cas pour solution

l'intégrale de Poisson : $U_A = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{(R^2-r^2)\, f(\psi)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\, d\psi$

r, φ étant les coordonnées du point A.

Pour étudier cette intégrale, nous l'avons développée en série trigonométrique : $U(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$

où l'on a pour coefficients :

$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos\psi\, d\psi \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin\psi\, d\psi$

$f(\psi)$ étant une fonction périodique de période 2π, continue sur la circonf.

La forme analytique de ce développement est, en faisant rentrer R dans les coefficients constants a_m, b_m :

$$\sum_0^\infty (a_m r^m \cos m\varphi + b_m r^m \sin m\varphi)$$

où $r^m \cos m\varphi$, $r^m \sin m\varphi$ sont des polynômes entiers et homogènes en (x, y)

car on a : $x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et par la formule de Moivre :

$(x+iy)^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = u_m(x,y) + i\, v_m(x,y)$

en appelant u_m, v_m ces 2 polynômes. On a donc le développement en (x,y) : $U(x,y) = \sum_0^\infty [a_m u_m(x,y) + b_m v_m(x,y)]$

Telle est la forme analytique de la série trigonométrique qui fournit la solution du problème de Dirichlet dans un cercle. Considérons cette série en elle-même, a priori, pour en déduire les principales propriétés.

Définissons d'abord ce que nous entendrons par son rayon de convergence.

Considérons les 2 séries : $\sum a_m r^m$ et $\sum b_m r^m$

Chacune est convergente dans un certain intervalle linéaire où r est compris. La 1e entre $-l$ et $+l$, la 2e entre $-l'$ et $+l'$. Prenons le plus petit des 2 intervalles, c.à.d. la plus petite des 2 quantités l, l' en valeur absolue.

Soit $(-I_1, +I_1)$ cet intervalle; les 2 séries y sont toutes deux convergentes. On appellera I_1 le rayon de convergence de la série trigonométrique. En effet, elle sera convergente en tout point du cercle de centre O et de rayon I_1; car chacun de ses termes: $(a_m r^m \cos m\varphi + b_m r^m \sin m\varphi)$ est inférieur en valeur absolue à la somme des termes correspondants des 2 séries considérées. Donc dans ce cercle de convergence, la série trigonométrique sera une fonction définie de (x, y): $F(x, y)$

Chacun des polynômes u_m, v_m satisfait à l'équation de Laplace; donc le terme général de F y satisfait aussi. On va prouver que la fonction F a des dérivées partielles et satisfait également à l'équation de Laplace.

Elle a des dérivées, car, en la mettant sous la forme:

$$F(x, y) = \Sigma r^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$$

on pourra prendre les dérivées de chaque terme par rapport à r:

$$\Sigma m r^{m-1} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$$

puis par rapport à φ: $\Sigma m r^m (- a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi)$

Or toute série de cette forme est uniformément convergente dans le cercle de convergence de F, car leurs termes sont respectivement moindres en valeur absolue que ceux de la série: $\Sigma r^m (A_m + B_m)$

Les séries qu'on obtient en prenant les dérivées de chaque terme de F étant uniformément convergentes, on peut les intégrer terme par terme et retrouver la fonction F: ce sont donc bien les dérivées partielles de la série F. Connaissant les dérivées partielles par rapport à r, φ, on en conclura sans peine les dérivées partielles par rapport à x, y:

$x = r \cos\varphi$ $\qquad$ $y = r \sin\varphi$

$r^2 = x^2 + y^2$ $\qquad$ $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$r\,dr = x\,dx + y\,dy$ $\qquad$ $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$ $\qquad$ $d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi$ $\qquad$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r} \qquad = \frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

Donc F admet également des dérivées partielles par rapport à (x, y) On peut les calculer directement, puisqu'on sait qu'il suffit de prendre la dérivée de chaque terme.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \Sigma\left(a_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + b_m \frac{\partial v_m}{\partial x}\right)$$ série convergente dans le cercle I_o.

Or si nous prenons les dérivées de : $(x+iy)^m = u_m(x,y) + v_m(x,y)$ par rapport à x, nous aurons : $m(x+iy)^{m-1} = \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial x}$

et d'autre part, on sait que : $m(x+iy)^{m-1} = m(u_{m-1} + v_{m-1})$

Donc : $\frac{\partial u_m}{\partial x} = m u_{m-1}$ $\frac{\partial v_m}{\partial x} = m v_{m-1}$ et pour la série entière :

$$\Sigma\left(a_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + b_m \frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = \Sigma\, m\left(a_m u_{m-1} + b_m v_{m-1}\right)$$

série de même forme que la série primitive F, aux coefficients près, et convergente dans le même cercle de convergence. Ainsi la fonction F a des dérivées partielles de tout ordre, qu'on obtiendra en prenant les dérivées de même ordre de tous les termes de la série F ; et puisque l'on a : $\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} = 0$

On aura aussi : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

La fonction $F(x,y)$ satisfait à l'équation de Laplace c.q.f.d.

Soit une autre série de même forme : $\Sigma(a'_m u_m + b'_m v_m) = \Phi(x,y)$

Si ces 2 fonctions F et Φ sont égales dans le même cercle de convergence il faut que les coefficients correspondants de r^m soient égaux, c.à.d. $a'_m = a_m$ $b'_m = b_m$

De cette remarque nous allons déduire une conséquence fondamentale touchant les fonctions complexes.

Soit une fonction : $(U+iV)$ de la variable complexe $z = x+iy$, définie et continue dans un cercle (y compris la circonférence). On pourra développer U et V, donc $(U+iV)$, en séries trigonométriques :

$$U = \Sigma r^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) = \Sigma (a_m u_m + b_m v_m)$$

$$V = \Sigma r^m (a'_m \cos m\varphi + b'_m \sin m\varphi) = \Sigma (a'_m u_m + b'_m v_m)$$

Les fonctions U, V ne sont pas indépendantes, puisqu'elles forment une fonction analytique ; on doit avoir : $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

La 1re égalité s'écrit :

$$\Sigma\left(a_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + b_m \frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = \Sigma\left(a'_m \frac{\partial u_m}{\partial y} + b'_m \frac{\partial v_m}{\partial y}\right)$$

Or les fonctions $(u_m + iv_m)$ sont aussi analytiques, on a donc :

$$\Sigma\left(a'_m \frac{\partial u_m}{\partial y} + b'_m \frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \Sigma\left(-a'_m \frac{\partial v_m}{\partial x} + b'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}\right)$$

d'où : $$\Sigma\left(a_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + b_m \frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = \Sigma\left(b'_m \frac{\partial u_m}{\partial x} - a'_m \frac{\partial v_m}{\partial x}\right)$$

Les termes généraux de ces 2 séries se correspondent, car ils sont tous deux de degré $(m-1)$; donc, en vertu de la remarque précédente, les coefficients correspondants doivent être égaux : $b'_m = a_m \quad -a'_m = b_m$.

Donc : $V = \Sigma r^m (-b_m \cos m\varphi + a_m \sin m\varphi)$ et enfin :

$$U + iV = \Sigma\left[a_m r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) + b_m r^m (\sin m\varphi - i\cos m\varphi)\right]$$

$$= \Sigma r^m (a_m - ib_m)(\cos m\varphi + i \sin m\varphi) = \Sigma A_m z^m$$

en posant : $A_m = a_m - ib_m$.

<u>Théorème de Cauchy</u> : Une fonction analytique continue à l'intérieur

d'un cercle peut être développé à l'intérieur de ce cercle en une série convergente suivant les puissances entières croissantes de la variable complexe.

Il s'ensuit qu'une fonction analytique d'une variable complexe est développable par la formule de Maclaurin. Ce théorème ne fait donc qu'énoncer sous une autre forme la propriété fondamentale des fonctions analytiques (v. page 26.)

Les théorèmes relatifs aux séries à termes variables s'étendent immédiatement aux séries à termes complexes comme : $\Sigma A_m z^m$ en entendant par valeur absolue de chaque terme son module.

Une telle série, représentant la fonction complexe : $U + iV$ se dédouble en 2 autres qui représentent U et V :

$$\Sigma (a_m u_m - b_m v_m) \qquad \Sigma (b_m u_m + a_m v_m)$$

Le cercle de convergence commun de ces 2 séries sera celui des 2 séries à termes complexes : $\Sigma a_m z^m$ $\Sigma b_m z^m$ et leur cercle de convergence sera aussi celui de la série en z : $\Sigma A_m z^m$.

— Soit une fonction analytique $U(x, y)$ telle qu'on ait : $\Delta U = 0$ continue à l'intérieur d'un cercle ayant l'origine pour centre. Elle est développable en chaque point de ce cercle par une série trigonométrique

$$\Sigma \left(a_m u_m(x, y) + b_m v_m(x, y)\right)$$

Nous allons définir ce qu'on appelle le prolongement analytique de cette fonction.

Prenons dans le cercle un point $(x_0 y_0)$ différent de l'origine ; on a une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace et continue au voisinage de ce point. On pourra la développer en une série con-

vergente à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre (x_0, y_0) :

$$\Sigma\left[a'_m u'_m(x-x_0, y-y_0) + b'_m v'_m(x-x_0, y-y_0)\right]$$

Le rayon de ce cercle pourra être toujours assez grand pour qu'il soit tangent intérieurement au cercle O. Mais si le rayon de convergence de la série est plus grand, le cercle pourra dépasser le cercle O, et la fonction $V(x, y)$ sera définie par cette nouvelle série dans la région du nouveau cercle extérieure à l'ancien; on dit que la fonction V est alors prolongée hors de son premier cercle de convergence. On pourra de même trouver un 3e cercle excentrique au second et qui en soit une extension, et ainsi de suite. Il pourra ainsi se faire qu'on prolonge la fonction suivant une certaine courbe issue de O et parcourant le plan, si les cercles successifs dont les centres seront pris sur cette courbe se dépassent tour à tour: la fonction sera étendue à la totalité de l'aire enfermée par ces cercles.

On peut se donner la succession continue des valeurs de V sur le contour du cercle, soit $f(\psi)$, et en conclure sa valeur pour un point intérieur quelconque par l'intégrale de Poisson. - Si la fonction $f(\psi)$ n'est pas analytique, on ne pourra pas prolonger la fonction V hors du cercle. En effet, si le second cercle pouvait dépasser le premier, il enfermerait un arc $\alpha\beta$ du premier, et sur cet arc la fonction V devrait être analytique, ce qui est contre l'hypothèse.

On peut étendre toutes ces conclusions à des fonctions de la variable complexe z.

Nous allons exposer la méthode par laquelle Cauchy a établi le théorème précédent. Il a considéré l'intégrale:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

prise suivant un contour fermé c, z étant l'affixe d'un point qui décrit

ce contour, $f(z)$ une fonction analytique continue sur ce contour, et x l'affixe d'un point intérieur au contour. Il a d'abord prouvé que cette intégrale représente la valeur de $f(x)$ au même point.

En effet $\frac{f(z)}{z-x}$ est continue pour tout autre point que le point x; donc si l'on décrit autour de ce point comme centre un petit cercle Γ, on a :

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Comme la fonction f est continue à l'intérieur du contour, on pourra prendre le rayon ρ du cercle Γ suffisamment petit pour que, ε étant un nombre positif fixe, on ait : $|f(z) - f(x)| = \eta < \varepsilon$.

$$f(z) = f(x) + \eta \qquad \int_\Gamma \frac{f(x)+\eta}{z-x}\,dz = f(x)\int_\Gamma \frac{dz}{z-x} + \int_\Gamma \frac{\eta\,dz}{z-x}$$

Pour calculer la 1e intégrale, posons : $z = x + \rho e^{\theta i}$

θ variant de 0 à 2π dans l'intégration; $dz = \rho i e^{\theta i}\,d\theta$

$$\frac{dz}{z-x} = i\,d\theta \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-x} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \qquad f(x)\int_\Gamma \frac{dz}{z-x} = 2\pi i . f(x)$$

Pour la 2e intégrale, elle est indépendante du rayon ρ du cercle, car elle est la différence entre l'intégrale $\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz$ et $2\pi i . f(x)$

On peut donc faire décroître ρ indéfiniment ; si l'on prend ρ suffisamment petit, on pourra la rendre plus petite que tout nombre ε donné d'avance :

$$\left|\int_\Gamma \frac{\eta\,dz}{z-x}\right| = \left|\int_0^{2\pi} i\eta\,d\theta\right| < i\varepsilon\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.\varepsilon. \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\eta\,dz}{z-x}\right| < \varepsilon$$

Comme cette intégrale est une quantité constante, indépendante de ρ, et qu'on ~~peut~~ doit la trouver plus petite que toute quantité donnée, elle doit être nulle. On a donc bien :

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 2i\pi . f(x)$$

ou : $$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{z-x}dz = f(x)$$

Cette formule est équivalente à celle que nous avons établie antérieurement et d'où nous sommes partis : $U_A = \frac{1}{2\pi}\int_c \left(\log r \frac{dU}{dn} - U\frac{d\log r}{dn}\right)ds$

où r est la distance variable du point intérieur A à l'élément d'arc ds.

Appliquons la même formule à la fonction V, qui compose avec U la fonction complexe : $U + iV$. On a les relations fondamentales :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = \frac{\partial U}{\partial x}dy - \frac{\partial U}{\partial y}dx = -ds\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta\right)$$

α, β étant les angles que fait avec les axes la normale intérieure au contour :

$$dx = \cos\beta\, ds \qquad dy = -\cos\alpha\, ds$$

Or : $\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta = \frac{dU}{dn}$ Donc : $\frac{dU}{dn} = -\frac{dV}{ds}$.

Portons cette valeur dans l'intégrale ; on aura l'intégrale partielle :

$$\int_c \log r \frac{dV}{ds}ds = V\log r - \int_c V\frac{d\log r}{ds}ds$$ en intégrant par parties.

Or $V\log r$ est nul sur le contour : l'intégrale ~~de Cauchy~~ ne contient plus que U et V, sans leurs dérivées : $\frac{1}{2\pi}\int_c\left(V\frac{d\log r}{ds} - U\frac{d\log r}{dn}\right)ds$

Or V est nulle par hypothèse sur le contour ; il reste l'intégrale : $-\frac{1}{2\pi}\int_c U\frac{d\log r}{dn}ds = -\frac{1}{2\pi}\int_c \frac{U}{r}\frac{dr}{dn}ds$.

Cette intégrale a la même valeur que suivant le cercle Γ : $\int_c \frac{U}{r}\frac{dr}{dn}ds = \int_\Gamma \frac{U}{r}\frac{dr}{dn}ds$

Or, sur ce cercle, $\frac{dr}{dn} = -1$: $\int_c \frac{U}{r}\frac{dr}{dn}ds = \int_\Gamma -\frac{U}{r}ds$ Donc :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_c U\frac{d\log r}{dn}ds = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{U}{r}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-x}dz$$

De cette formule fondamentale Cauchy a déduit le développement en série de la fonction $f(x)$ à l'intérieur d'un cercle où elle est définie.

On peut développer : $\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z\left(1-\frac{x}{z}\right)}$ suivant les puissances croissantes de z, puisque $|x| < |z|$.

$$\frac{1-\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{z}} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots + \left(\frac{x}{z}\right)^n$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots + \left(\frac{x}{z}\right)^n + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{z}}$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{z-x}$$

$$\int_c \frac{f(z)}{z-x}dz = \int_c \frac{f(z)}{z}dz + x\int_c \frac{f(z)}{z^2}dz + x^2\int_c \frac{f(z)}{z^3}dz + \cdots + x^n\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz + \int_c \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}dz$$

Or le reste de ce développement tend vers 0, puisque $\left|\frac{x}{z}\right| < 1$, et que d'ailleurs : $|z-x| > 0$ sur le contour. On peut donc prolonger indéfiniment ce développement, et on aura une série convergente qui représente $f(x)$.

On a établi précédemment l'existence d'un cercle de convergence pour la série : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$

Elle est convergente pour tout point intérieur, divergente pour tout point extérieur. On ne sait rien encore pour un point du contour du cercle.

2e Théorème d'Abel. Soit un point x_0 de la circonférence pour lequel la série soit convergente ; quand le point intérieur x tend vers x_0 par un chemin non tangent à la circonférence la valeur de la série au point x

tend vers sa valeur au point x_0. (Dans sa démonstration, Abel suppose que x tend vers x_0 suivant le rayon; c'est une restriction inutile.)
Cela signifie en somme que les valeurs intérieures ont pour limite la valeur en x_0, c.à.d. que la continuité de la série s'étend au point x_0 (mais non nécessairement aux points voisins de x_0 sur le contour.)

On peut toujours supposer que le point x_0 se trouve sur l'axe des x.
La série: $a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$ est par hypothèse convergente.
On peut donc prendre n assez grand pour que les quantités successives:

$a_n x_0^n$

$a_n x_0^n + a_{n+1} x_0^{n+1}$

$a_n x_0^n + a_{n+1} x_0^{n+1} + \dots + a_{n+p} x_0^{n+p}$

que nous appellerons $S_0\, S_1\, S_2 \dots S_p$, aient un module inférieur à ε:

$$|S_p| < \varepsilon \qquad \text{quel que soit } p.$$

Considérons d'autre part la somme de termes variables:

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}$$

pris dans la série proposée. On peut la transformer comme il suit:

$$a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + a_{n+1} x_0^{n+1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} + \dots + a_{n+p} x_0^{n+p} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p}$$

$$= S_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + (S_1 - S_0)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} + \dots + (S_p - S_{p-1})\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)\left[S_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + S_1\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} + \dots + S_{p-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p-1}\right] + S_p\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p}$$

Posons: $\left|\frac{x}{x_0}\right| = r$ $\quad$ r tend vers 1 quand x tend vers x_0; et:

$1 - \frac{x}{x_0} = \rho e^{\alpha i} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ α est l'angle $O x_0 x$, et, grâce à la condition de l'énoncé, $\cos\alpha > 0$. Cherchons une limite supérieure de la somme considérée qui est le reste de la série, n étant un entier fixe, et p pouvant croître indéfiniment.

$$\left|a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}\right| < \rho\varepsilon\left[r^n + r^{n+1} + \dots + r^{n+p-1}\right] + \varepsilon$$

Or $\rho\varepsilon\left[r^n + r^{n+1} + \dots + r^{n+p-1}\right] = \rho\varepsilon r^n\left(1 + r + r^2 + \dots + r^{p-1}\right) = \rho\varepsilon r^n \frac{1-r^n}{1-r}$

Donc $\left|\Sigma a_n x^n\right| < \rho\varepsilon \frac{1}{1-r} + \varepsilon = \varepsilon\left[1 + \frac{\rho}{1-r}\right]$

Cette limite supérieure est de l'ordre de ε car $\frac{\rho}{1-r}$ reste fini. Comme ρ tend vers 0, et r vers 1, ce quotient prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais on va trouver sa vraie valeur : rappelons que :

$$\frac{x}{x_0} = 1 - \rho\cos\alpha - i\rho\sin\alpha \qquad r = \left|\frac{x}{x_0}\right| = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\alpha}$$

$$1 - r^2 = \rho(2\cos\alpha - \rho) \qquad \frac{\rho}{1-r} = \frac{1+r}{2\cos\alpha - \rho} \qquad \lim \frac{\rho}{1-r} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

quantité finie, en vertu de notre hypothèse : $\cos\alpha > 0$.

Donc, quel que soit x intérieur au cercle, le reste de la série tend vers 0, c.à.d. qu'il peut être rendu plus petit que $M\varepsilon$. D'autre part, les n premiers termes de la série forment un polynôme entier en x ; on peut prendre x assez voisin de x_0 pour que ce polynôme diffère du polynôme de même forme en x_0 d'une quantité inférieure à ε ; dans ces conditions, les 2 séries infinies, en x et en x_0, différeront de moins de $(M+1)\varepsilon$, c.à.d. que la série variable en x a pour limite la série en x_0.

— Nous avons défini plus haut le prolongement analytique d'une fonction continue définie dans un cercle. On a vu que les fonctions

non analytiques ne peuvent jamais sortir de leur cercle de convergence. On va voir que certaines fonctions analytiques peuvent être aussi enfermées dans leur cercle de convergence, sans qu'on puisse les étendre en dehors.

Exemple (de M. Weierstrass) : Considérons la série dont le terme général est : $b^n x^{c^n}$, n prenant toutes les valeurs entières positives, et c étant un entier positif fixe ; on a par hypothèse : $|b| < 1$

La série a un rayon de convergence égal à 1 ; elle est même absolument convergente sur la circonférence de rayon 1, car la série de ses modules est convergente pour $x = 1$. Elle est d'ailleurs divergente en dehors, car le rapport d'un terme au précédent est : $b x^{c^n(c-1)}$ et comme $|x| > 1$, il augmente indéfiniment avec n. On va prouver que cette série ne peut être prolongée hors du cercle (la démonstration suivante est due à M. Hadamard.)

Remplaçons dans chaque terme x par $x e^{\frac{2k\pi i}{c^h}}$, on va montrer que la série ne change pas, au moins à partir d'un certain terme. En effet, le terme général deviendra : $b^n x^{c^n} e^{\frac{2k\pi i}{c^{h-n}}} = b^n x^{c^n} e^{2k\pi i \cdot c^{n-h}}$

Or à partir d'un certain rang, $(n-h)$ devient positif ; l'exposant de e devient entier, et l'on a : $e^{2\lambda\pi i} = 1$

Donc à partir de ce rang tous les termes se trouvent multipliés par 1. La nouvelle série converge et diverge donc comme la série proposée.

Or, si cette série pouvait s'étendre hors du cercle dans le voisinage d'un point x_0 de la circonférence, le long d'un certain arc $d\beta$, elle pourrait s'étendre aussi dans le voisinage d'un autre point quelconque, soit x'_0. L'argument de x est $\frac{2k\pi}{c^h}$: on peut en disposer de manière à passer d'un point x_0 de la circonférence à un autre point du voisinage de x'_0 : en prenant h suffisamment grand, $\frac{2\pi}{c^h}$ sera suffisamment petit pour

qu'un des points de division tombe dans le voisinage de x_0, et on pourra toujours prendre K assez grand pour passer de x_0 à ce point voisin de x_0 (K est le nombre des divisions comprises entre x_0 et x_0) Ce qui sera vrai du point x_0 sera encore vrai du point x_0, c.à.d de tout point de la circonférence. Mais si l'on peut prolonger la série au-delà de tous les points de la circonférence sans exception, elle doit avoir un cercle de convergence qui dépasse le cercle de rayon 1, ce qui est impossible; donc elle ne peut être prolongée hors de ce cercle en aucun point.

— On sait que si l'on se donne une succession continue de valeurs sur un contour fermé, la fonction qui satisfait à l'équation de Laplace et prend cette suite de valeurs sur le contour est définie dans tout le contour. Cette fonction peut-elle se prolonger hors du contour? C'est la question que nous allons examiner.

Elle peut s'étendre hors du contour au moins dans certains cas particuliers. Supposons que le contour soit formé d'un segment de l'axe des x, $\alpha\beta$, et d'une courbe $\alpha\gamma\beta$, et que les valeurs assignées à la fonction sur l'axe soient toutes nulles. On va montrer que l'on peut prolonger la fonction au-delà de l'axe des x.

γ
γ'
α
α'
β'
β
γ''

Considérons en effet un demi-cercle décrit sur un segment $\alpha'\beta'$ de $\alpha\beta$. Complétons ce demi-cercle $\alpha'\gamma'\beta'$ par $\alpha'\gamma''\beta'$. La fonction étant définie à l'intérieur du contour prend une suite de valeurs connues suivant $\alpha'\gamma'\beta'$. Prenons sur $\alpha'\gamma''\beta'$ des valeurs symétriques, égales et de signes contraires; la suite des valeurs sur $\alpha'\gamma'\beta'$ et sur $\alpha'\gamma''\beta'$ détermine une certaine fonction à l'intérieur de ce cercle. On va montrer que cette nouvelle fonction prend sur le diamètre $\alpha'\beta'$ la valeur zéro, c.à.d qu'elle coïncide avec la

fonction donnée. En effet, on pourra développer cette fonction en série trigonométrique à l'intérieur de ce cercle

$$V(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cos m\psi \, d\psi \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \sin m\psi \, d\psi$$

Or, $f(\psi)$ prend par hypothèse des valeurs égales et de signes contraires pour ψ et $(2\pi - \psi)$ Donc $a_m = 0$, car les éléments de 0 à π sont respectivement égaux et de signes contraires aux éléments de π à 2π. Il reste pour V un développement en sinus : or pour tous les points de $\alpha'\beta'$: $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$; donc la série s'annule sur tout le diamètre $\alpha'\beta'$. V étant nulle sur ce diamètre coïncide avec la fonction donnée dans le demi-cercle $\alpha\gamma'\beta'$ et conséquemment la prolonge dans le demi-cercle $\alpha'\gamma''\beta'$.

Nous allons généraliser la proposition précédente, en supposant toujours que le contour fermé a une partie droite qu'on peut prendre pour axe des x. On va prouver que si sur un segment $\alpha\beta$ de l'axe des x la suite des valeurs ~~données~~ assignées à la fonction u est une fonction analytique de x ; $a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots\ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$ on peut étendre la fonction u au-delà de $\alpha\beta$.

En effet, considérons la série de même forme où : $z = x+iy$:

$$a_0 + a_1(z-x_0) + \ldots\ldots + a_n(z-x_0)^n + \ldots$$

effect convergente dans un certain cercle décrit autour de x_0 situé sur l'axe des x. Si nous y remplaçons z par $x+iy$, elle se dédouble en 2 séries convergentes : $v(x,y) + i\,w(x,y)$ de même forme et dont chacune satisfait à l'équation de Laplace.

D'ailleurs, la fonction complexe $v + iw$ se réduit à la fonction u pour $y = 0$, càd sur l'axe des x.

Prenons : $u(x, y) = v(x, y)$

sur $\alpha\beta$, càd : $u(x, 0) = v(x, 0)$

Remarquons que la fonction u est définie seulement au-dessus de $\alpha\beta$, tandis que la fonction v est définie dans tout le cercle x_0 ; posons donc dans le demi-cercle supérieur : $u - v = U$

La fonction U satisfera à l'équation de Laplace, et s'annulera sur $\alpha\beta$; en vertu du théorème précédent, on pourra la prolonger au-delà de $\alpha\beta$; or v aussi peut s'étendre au-delà de $\alpha\beta$, puisqu'elle est définie dans tout le cercle x_0 ; donc leur somme u pourra s'étendre au-delà de l'axe des x sur une certaine étendue.

Avant d'étendre cette proposition à un contour de forme quelconque nous devons faire les remarques suivantes :

Si l'on a une fonction analytique $Z = f(z)$ développable en série au voisinage du point a suivant les puissances de $(z - a)$, et si l'on a en ce point : $f'(a) \gtrless 0$

soit A le point correspondant à a dans la transformation $Z = f(z)$ càd : $A = f(a)$

on peut démontrer que z est une fonction analytique de Z, développable en série au voisinage du point A suivant les puissances de $(Z - A)$. C'est le théorème des fonctions inverses étendu aux variables complexes. On pourra donc, en décrivant autour des points a et A dans leurs plans respectifs des cercles de convergence, faire correspondre entre eux les points de ces 2 cercles d'une façon univoque.

Si l'on a dans le plan de z une fonction u satisfaisant à l'équation de Laplace, la transformation $Z = f(z)$ la changera en une fonction U de la variable Z dans l'autre plan : $u(x,y)$ devient $U(X,Y)$.
La fonction U satisfait aussi à l'équation de Laplace.
En effet, prenons une fonction v telle que $(u + iv)$ soit fonction ~~de~~ analytique de z : elle deviendra dans la transformation :
$U(X,Y) + iV(X,Y)$ c.à.d. une fonction analytique de Z :
or U en est la partie réelle, donc on a : $\Delta U = 0$.
Ainsi une représentation conforme transforme une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace en une fonction satisfaisant à la même équation.

Nous pouvons maintenant étendre la proposition précédente à un contour C pour tout segment $\alpha\beta$ qui sera un arc analytique.
On dit qu'un arc de courbe est analytique, quand, cette courbe étant définie par x, y en fonction du paramètre variable t, les coordonnées sont des fonctions analytiques du paramètre :

$$x = f(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots\dots + a_n(t-t_0)^n + \dots$$

$$y = \varphi(t) = b_0 + b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + \dots\dots + b_n(t-t_0)^n + \dots$$

Cela posé, si une fonction est définie à l'intérieur d'un contour C dont l'arc $\alpha\beta$ est analytique, et si sur le même arc cette fonction a une expression analytique en fonction du même paramètre t :

$$c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots\dots + c_n(t-t_0)^n + \dots$$

cette fonction peut être prolongée analytiquement au-delà de l'arc $\alpha\beta$.

Pour le démontrer, nous allons transformer l'arc $\alpha\beta$ en un segment rectiligne. Supposons que $f'(t_0)$ et $\varphi'(t_0)$ ne soient pas nulles toutes deux c.à.d. que le point t_0 ne soit pas un point singulier du contour.

Supposons qu'on donne à t des valeurs complexes voisines de t_0; on aura: $T = t + it'$ $\quad x + iy = f(T) + i\varphi(T)$ ou $\quad z = F(T)$

Cette équation établit une correspondance uniforme entre les points du plan z et ceux du plan T, car: $F'(t_0) = f'(t_0) + i\varphi'(t_0) \gtrless 0$

t_0 étant une valeur réelle de la variable complexe T. Cette correspondance a lieu pour les points suffisamment voisins de z_0 dans le plan z et de t_0 dans le plan T, t_0 correspondant à z_0. – Sur l'arc $\alpha\beta$, dans le plan z, t n'a que des valeurs réelles t; donc aux points de l'arc $\alpha\beta$ correspondent des points de l'axe des t, et à l'arc $\alpha\beta$ correspond un segment de l'axe des quantités réelles dans le plan T. Si autour du point z_0 ($x_0\, y_0$) on décrit un petit cercle, la figure correspondante sera un petit cercle autour de t_0. La fonction $z = F(T)$ est continue et analytique dans ce petit cercle, et particulièrement sur son diamètre réel; on peut donc l'étendre au-delà de l'axe des quantités réelles dans le plan T, et dans le plan z, on peut la prolonger au-delà de l'arc $\alpha\beta$ correspondant dans le cercle z_0 qui correspond au cercle t_0. La transformation:

$$z = F(T)$$

nous permet ainsi d'étendre à un contour quelconque les conditions d'extension trouvées pour un contour rectiligne.

Ces théorèmes sur le prolongement analytique d'une fonction hors d'un contour donné permettent de savoir si une fonction a des dérivées sur ce contour. En effet, quand on s'est donné sur un contour la succession continue des valeurs que doit prendre la fonction, on sait

que ses dérivées seront continues et parfaitement déterminées comme la fonction elle-même à l'intérieur; mais sur le contour on ne peut rien affirmer de ces dérivées, même pas qu'elles existent. Or si l'on peut étendre la fonction au-delà d'un certain arc $\alpha\beta$, on pourra affirmer qu'elle a des dérivées de tout ordre continues et bien définies sur cet arc, puisque la fonction est définie au-delà, et qu'alors l'arc $\alpha\beta$ devient intérieur à l'aire totale où la fonction se trouve déterminée.

Nous allons ici rappeler brièvement la définition des principales fonctions transcendantes pour le cas d'une variable complexe.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots\cdots$$

Dans cette série, le rapport d'un terme au précédent : $\frac{z^n}{n}$ tend vers 0 pour toute valeur de z; donc son rayon de convergence est infini, ce qui veut dire que la fonction e^z existe et est continue dans tout le plan, et qu'elle a en tout point des dérivées de tout ordre égales à elle-même, comme il est aisé de le vérifier.

La propriété fondamentale de la fonction e^z se traduit par l'égalité :

$$e^z e^b = e^{z+b}$$

Pour le prouver, prenons les dérivées des 2 membres pour $z=0$: elles sont égales à e^b comme les fonctions elles-mêmes, et les dérivées de tout ordre sont toujours égales à e^b. On peut donc développer les 2 membres en série de Taylor dans tout le plan; les 2 développements seront identiques, donc les 2 fonctions le sont.

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots\cdots$$

ces 2 séries sont également convergentes dans tout le plan; donc les 2 fonctions qu'elles définissent ~~sont~~ définies et continues en tout point.

On a immédiatement : $e^{zi} = \cos z + i \sin z$

d'où l'on déduit les formules d'Euler :

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

Si l'on met z sous la forme explicite : $a+bi$, on a :

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Le module de e^z est donc e^a, et son argument est $b + 2k\pi$.

En particulier, on a : $e^{2k\pi i} = 1 \qquad e^{(2k-1)\pi i} = -1.$

La fonction : $\log z$ sera par définition la racine u de l'équation : $z = e^u$ c.à.d la fonction inverse de e^z.

Posons : $u = p + qi$ et : $z = re^{\alpha i}$ $\quad |z| = r.$

L'équation devient : $re^{\alpha i} = e^p e^{qi}$ d'où : $r = e^p \quad e^{\alpha i} = e^{qi}$

Donc : $p = \log r \qquad \alpha = q + 2k\pi$ d'où la solution :

$$u = \log z = \log r + (\alpha + 2k\pi)i$$

Pour définir $\log z$ comme fonction de z, on prendra pour $z = z_0$ une des déterminations de u, c.à.d un argument, et on la suivra par continuité sur un chemin allant de z_0 en z : la valeur de $\log z$ sera alors déterminée en z. Si en particulier on revient en z_0 point de départ après un chemin quelconque, on aura la même valeur qu'en partant si la courbe décrite n'enferme pas l'origine; on aura une valeur augmentée ou diminuée de $2\pi i$ si la courbe entoure l'origine, et plus généralement la valeur aura varié de $\pm 2k\pi i$ si le point mobile z a fait k tours autour de l'origine dans le sens positif ou négatif.

Ainsi la fonction $\log z$ n'a pas, comme les précédentes, une valeur unique et déterminée en chaque point du plan. On peut fixer sa valeur pour un point: la détermination qu'elle prend pour tout autre point du plan dépend du chemin suivi pour passer du premier au second, et on peut toujours suivre un chemin tel qu'on arrive au second point avec telle détermination qu'on veut. Cette fonction a donc en chaque point une infinité de déterminations distinctes, qui diffèrent entre elles de $2\pi i$.

La fonction: $$z^m = e^{m \log z}$$
sera déterminée dans les mêmes conditions que $\log z$. Si z fait un tour autour de l'origine, $\log z$ variera de $\pm 2\pi i$, donc on aura multiplié z^m par $e^{\pm 2\pi i}$ c.à.d. par 1.

Ainsi la multiplicité des déterminations que nous venons de constater pour $\log z$ n'existe pas pour z^m.

Remarquons enfin que la fonction: $\log(z-a)$ est discontinue pour $z=a$ comme la fonction $\log z$ pour $z=0$, et qu'elle éprouve les mêmes variations quand z tourne autour de a que $\log z$ quand z tourne autour de l'origine. Il suffit, pour s'en rendre compte, de transporter l'origine au point a.

— Nous pouvons maintenant aborder la solution du problème de Riemann que nous énonçons sous la forme du théorème suivant:

Étant donnés d'une part un contour simple limitant une aire quelconque, et d'autre part un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon 1, on peut trouver une fonction analytique $Z = f(z)$ qui détermine une transformation telle que l'aire limitée par le cercle Γ dans le plan Z et l'aire limitée par le contour C dans le plan z se correspondent mutuellement d'une manière uniforme.

On peut résoudre assez facilement ce problème au moyen du problème de Dirichlet dont nous avons trouvé la solution générale.

Soit un point fixe A à l'intérieur du contour C; soit r sa distance à un point mobile qui décrit le contour. La fonction $\log r$ (au sens arithmétique) ~~aura~~ prendra sur le contour C une suite continue de valeurs. Résolvons le problème de Dirichlet pour cette succession de valeurs; soit U la fonction qui satisfait l'équation de Laplace dans l'aire C et qui prend sur le contour les valeurs de $\log r$. Associons à cette fonction U la fonction V déterminée par les équations différentielles:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

telle que $(U+iV)$ soit une fonction analytique de $z = x+iy$. La fonction V sera aussi continue et satisfera l'équation de Laplace.

Soit a l'affixe du point A: formons la fonction: $\log(z-a)$ elle sera discontinue pour $z=a$. Elle a pour expression:

$$\log r + \alpha i$$

à un multiple près de 2π. Formons enfin la fonction complexe de z:

$$\log(z-a) - (U+iV) = P + Qi$$

où P et Q sont des fonctions de (x, y). Cette fonction n'est pas déterminée d'une façon univoque dans l'aire C, à cause du logarithme qu'elle contient. $P(x,y)$ est bien déterminé, car: $P = \log r - U$

quantité finie et déterminée en tout point de l'aire C. En tout point du contour, $\log r = V$, donc $P = 0$

Au point A, c.à.d. pour $z = a$, $\log r = -\infty$ $P = -\infty$.

On a d'autre part : $Q = \alpha - V$

et c'est cette partie imaginaire qui comporte une infinité de déterminations.

On va prouver que la fonction de z : $Z = e^{P+Qi}$

est la solution du problème.

En premier lieu, cette fonction a une détermination univoque ; car Q étant déterminée en chaque point à un multiple près de 2π, toutes les déterminations correspondantes de e^{P+Qi} sont égales (comme multipliées par $e^{2\pi i} = 1$) Cette fonction est parfaitement définie dans l'aire C ;

$$e^{\log(z-a) - (U+iV)} = e^{\log(z-a)} \times e^{-(U+iV)} = (z-a)e^{-(U+iV)}$$

Pour $z = a$, au point A, cette fonction s'annule. — Reste donc à démontrer qu'elle établit une correspondance uniforme entre l'aire C et le cercle Γ.

1) D'abord, à tout point z dans C correspond un point Z dans Γ. Or P est une fonction continue à l'intérieur de C, sauf en A ; elle varie de 0 sur le contour à $-\infty$ en A ; elle satisfait d'ailleurs à l'équation de Laplace ; donc elle est constamment négative dans l'aire C (sans quoi elle aurait un maximum, ce qui est impossible.) Or le module de Z est $e^P < 1$: donc Z est à l'intérieur du cercle Γ, de rayon 1.

De plus, à chaque point de C correspond un point différent dans Γ. Soit b une constante négative ; considérons la courbe $P(x, y) = b$

Elle doit entourer le point A : en effet, quand on passe du p. A au contour, P passe de $-\infty$ à 0 ; or c'est une fonction continue ; donc elle passe par

la valeur b. Soit B le lieu des points où $P = b$; cette courbe ne peut avoir de points doubles, car si elle se croisait, elle formerait un contour fermé où ne se trouverait pas le point A; à l'intérieur de cette boucle le long de laquelle $P = b$, on devrait avoir constamment : $P = b$, puisque P ne peut y avoir ni maximum ni minimum; mais si P est une fonction constante dans cette boucle, on pourra l'étendre en dehors de cette boucle, et elle devra encore être constante dans l'aire entière C, ce qui est impossible. Ainsi la courbe $P = b$ est un contour simple entourant A, et intérieur à C. En faisant varier b de 0 à $-\infty$, on obtient un faisceau de courbes qui ne se rencontrent jamais, qui tendent vers le point A quand b tend vers $-\infty$, vers le contour C quand b tend vers 0. — Dans le cercle Γ, les courbes $P = b$ sont des courbes où le module de Z_1 (e^P) est constant : ce sont donc des cercles concentriques à Γ, et au faisceau de courbes $P =$ const. dans le plan z correspond le faisceau des cercles concentriques allant de 0 à Γ dans le plan Z_1, de sorte qu'à chaque courbe de l'un correspond une seule courbe de l'autre. Il suffira dès lors de démontrer qu'il y a correspondance uniforme entre les points de 2 courbes correspondantes pour qu'il soit prouvé qu'il y a correspondance uniforme entre tous les points des 2 aires C, Γ.

Soit une courbe D correspondant à une valeur déterminée de P dans le plan z_1 soit la circonférence Δ correspondant à la même valeur de P dans le plan Z. Nous allons montrer qu'à chaque point de la courbe D correspond un point unique de Δ, et inversement. Pour cela, il suffit évidemment de prouver que si un point $M(x, y)$ décrit D en marchant toujours dans le même sens, le point correspondant μ décrit Δ en marchant toujours dans le même sens : à chaque position de l'un correspondra une position unique de l'autre, et la correspondance uniforme sera établie.

Or l'argument du point μ est Q ; il faut donc voir si Q croît constamment quand M tourne en parcourant la courbe D dans le même sens.

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = \frac{\partial P}{\partial x}dy - \frac{\partial P}{\partial y}dx \qquad dx = \cos\beta\, ds \quad dy = -\cos\alpha\, ds$$

$$dQ = -ds\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta\right) = -ds\frac{dP}{dn} \qquad \frac{dQ}{ds} = -\frac{dP}{dn}$$

$\frac{dP}{dn}$ étant, comme nous savons, la dérivée de P suivant la normale à la courbe D dirigée vers l'intérieur du contour. Or P est toujours plus petit à l'intérieur du contour D que sur ce contour ; donc $\frac{dP}{dn}$ est constamment négatif c.à.d. que $\frac{dQ}{ds}$ est constamment positif ce qui prouve que Q augmente sans cesse quand M décrit le contour D.

Il n'y a donc, à l'intérieur du cercle Γ, qu'un point Z qui corresponde au point (x, y) de l'intérieur de la courbe C, et inversement.

Pour les points des 2 contours C et Γ, il y a une difficulté : on sait seulement que ces 2 contours se correspondent, sans pouvoir affirmer qu'il y ait correspondance uniforme entre tous leurs points. Il se pourrait que lorsque le point (x, y) tend vers un point du contour C, le point correspondant Z ne tendît vers aucun point déterminé du contour Γ. On ne peut étendre le raisonnement appliqué aux courbes D, Δ à leurs limites extrêmes C, Γ : cette incertitude provient de l'indétermination de la fonction V qui entre dans Q. V est définie en fonction de U par les 2 relations :
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ou par l'intégrale :
$$V = \int \frac{\partial U}{\partial x}dy - \frac{\partial U}{\partial y}dx$$

mais si la fonction U est parfaitement déterminée et continue sur le contour C ($U = \log r$) on ne sait si ses dérivées partielles sont continues, ni même si elles existent sur ce contour.

Cette incertitude peut être levée dans un cas particulier, fort fréquent d'ailleurs dans la pratique. Si le contour est entièrement analytique, sans points singuliers, $\log r$ sera une fonction analytique sur ce contour, et la fonction V, égale à $\log r$ sur le contour, pourra se prolonger analytiquement au-delà de tout point du contour; elle aura alors des dérivées partielles même sur le contour, ces dérivées seront continues, et V sera encore une fonction bien déterminée sur le contour. On pourra donc raisonner sur C et Γ comme sur D et Δ, et on prouvera que la correspondance uniforme s'étend aux contours eux-mêmes.

On vient de justifier la solution générale du problème de Riemann, donnée a priori, en s'imposant cette condition, qu'au point A intérieur au contour C corresponde le centre du cercle Γ; si en outre on se donne le point de Γ qui doit correspondre à un point déterminé de C, le problème est complètement déterminé, et n'admet qu'une solution.

Supposons le problème résolu; soit la solution: $Z = f(z)$.
Considérons la fonction: $\dfrac{f(z)}{z-a}$ a affixe du point A

Elle reste finie et continue dans toute l'aire et sur le contour C; car pour $z = a$, $f(z) = 0$, donc le quotient $\dfrac{f(z)}{z-a}$ reste fini et déterminé; d'ailleurs le point O ($Z = 0$) est le seul qui corresponde au point A ($z = a$); la fraction ne peut donc avoir de discontinuité qu'au point A.

Prenons maintenant: $\log \dfrac{f(z)}{z-a}$

et choisissons une des déterminations de ce logarithme; elle s'étendra sans ambiguïté à toute l'aire et au contour C, puisque la fraction reste finie et continue. Ce logarithme ainsi défini est donc une fonction finie et parfaitement déterminée dans toute l'aire C; posons:

$$\log \frac{f(z)}{z-a} = M + Ni \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(z)}{z-a} = e^{M+Ni}$$

On aura : $M = \log\left|\frac{f(z)}{z-a}\right| = \log|f(z)| - \log r \qquad |z-a| = r.$

et en particulier sur le contour, où $f(z) = Z = 1$ (rayon du cercle Γ) :

$M = \log 1 - \log r = -\log r$ c.à.d. : $M = -U$

On aura donc aussi, à une constante près : $N = -V + C$

C étant réelle. On retrouve donc la solution donnée à priori :

$$Z = f(z) = (z-a)e^{-(U+iV)} \times e^{Ci}$$

La constante arbitraire e^{Ci} permet de faire varier l'argument de Z, c.à.d. de faire tourner le cercle Γ sur lui-même de manière à amener le point qui correspond à un point donné de C en un point assigné à l'avance sur Γ ; le problème est alors résolu et on voit que la solution, ~~unique~~ que nous en avions donnée est l'unique solution qu'il comporte dans les conditions énoncées.

On peut remplacer la représentation conforme sur un cercle par la représentation conforme sur un demi-plan, et cette transformation est utile dans bien des cas. Nous allons montrer comment on peut établir une correspondance uniforme entre un cercle et un demi-plan.

Soit le demi-plan des y positifs ; on peut toujours amener la droite qui partage le plan à coïncider avec l'axe des x par un changement convenable de coordonnées. Faisons la transformation : $Z = \frac{z-i}{z+i}$

Au point $z = i$ correspond $Z = 0$.

Quand z est réel (sur l'axe des x) ;

y
i
x
O
Y
X
O

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \qquad |Z| = 1$$

A tous les points de l'axe des x correspondent les points de la circonférence de centre O et de rayon 1 dans le plan Z. Enfin quand z est imaginaire:

$$z = x+iy \qquad \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \left|\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right| = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} < 1 \quad \text{car } y>0.$$

Donc à tous les points du demi-plan correspondent les points intérieurs du cercle de rayon 1. D'ailleurs la représentation est conforme, puisque Z est une fonction analytique de z.

Nous pourrons dès lors représenter une aire quelconque sur un demi-plan au lieu de la représenter sur un cercle, ces 2 représentations étant équivalentes, puisque nous avons le moyen de passer de l'une à l'autre.

Cherchons par exemple à représenter par un demi-plan ~~un contour formé~~ l'aire comprise dans par 2 arcs de cercle qui se coupent en z_0, z_1; soit $\pi\alpha$ leur angle. On va voir que la transformation cherchée a pour formule:

$$Z = \left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Nous pouvons toujours supposer, pour simplifier, que z_0, z_1 sont réelles c.à.d. que les points z_0 et z_1 sont sur l'axe des x. Supposons que le point mobile z décrive l'arc supérieur $z_0 z_1$: posons:
$$\begin{cases} z-z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \\ z-z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \end{cases}$$

$$\frac{z-z_0}{z-z_1} = \frac{r_0}{r_1} e^{i(\theta_0-\theta_1)} \qquad \left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i}{\alpha}(\theta_0-\theta_1)}$$

Or $\theta_0 - \theta_1 = a$, angle dont est capable le segment supérieur, soit l'angle de la tangente en z_0 avec l'axe des x. Donc

$$Z = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{a}{\alpha}}$$

L'argument de Z étant constant $\left(\frac{a}{\alpha}\right)$, ce point décrit une demi-droite indéfinie issue de l'origine. En raisonnant de même sur l'arc inférieur $z_0 z_1$, on voit que le Z correspondant a pour argument :

$$\frac{a+\pi\alpha}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \pi$$

Il décrit donc une demi-droite issue de l'origine, qui prolonge exactement la 1e. Ainsi aux 2 arcs donnés correspond une droite indéfinie dans le plan des Z. D'autre part, les points compris entre les 2 arcs donnent pour Z un argument compris entre a et $(a+\pi\alpha)$, donc les points Z correspondants sont tous situés d'un même côté de la droite indéfinie dans le plan des Z ; ainsi la correspondance uniforme se trouve établie entre le demi-plan et l'aire enfermée par les 2 arcs $z_0 z_1$.

En particulier, un demi-cercle pourra être représenté par un demi-plan ; il suffit de faire dans ce cas $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad Z = \left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^2$

On pourra par conséquent représenter un demi-cercle par un cercle entier.

– Un secteur de cercle peut à son tour se représenter par un demi-cercle ; prenons son centre O pour origine ; il suffira de faire la transformation :

$$Z = z^\lambda$$

λ étant une quantité réelle convenablement choisie, pour que l'angle du secteur devienne égal à π. En effet, à l'arc : $\quad z = re^{i\theta}$ correspondra l'arc transformé : $\quad Z = r^\lambda e^{i\theta\lambda}$

θ variant de $\pi\alpha$, ouverture du secteur ; pour que Z décrive un demi-cercle, il suffira de prendre $\pi\alpha\lambda = \pi$. c. à d. $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

Si l'on veut en outre que le demi-cercle ait même rayon que le secteur, on prendra r pour unité de longueur ; $r^\lambda = r$.

La situation relative des 2 figures dépendra ~~de l'axe des x~~ du choix

Nous allons généraliser la notion de fonction complexe, en définissant ce qu'on peut entendre par une fonction complexe sur une surface (M. Beltrami.)

Nous avons vu qu'une fonction complexe dans le plan est une fonction composée de 2 autres, P et Q, telles que l'on ait :

$$dP^2 + dQ^2 = \lambda (dx^2 + dy^2)$$

λ ne dépendant que de x, y. Cette condition revient par exemple à celle-ci :

$$dP + i\,dQ = \mu\,(dx + i\,dy)$$

En considérant l'ensemble $(P + iQ)$ comme une fonction de $(x + iy)$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \qquad \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y} = \mu i,$$

et par suite, en éliminant μ :

$$\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y} = i\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

d'où les équations fondamentales :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

qui engendrent l'équation de Laplace caractéristique des fonctions P et Q :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Opérons de même sur 2 fonctions $P(u, v)$, $Q(u, v)$ u et v étant les 2 paramètres qui définissent une surface. On sait que l'élément d'arc sur cette surface a pour expression :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

La forme quadratique en du, dv est définie, c.à.d. qu'on a :

$$EG - F^2 > 0 \qquad \text{Posons donc :} \quad EG - F^2 = \Delta^2.$$

Imposons aux fonctions P, Q la même condition que plus haut :

$$dP^2 + dQ^2 = \lambda\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

λ ne devant dépendre que de u, v. Cette condition revient à celle-ci :

$$(dP + i\,dQ)(dP - i\,dQ) = \frac{\lambda}{E}\Big(E\,du - (-F + i\Delta)\,dv\Big)\Big(E\,du - (-F - i\Delta)\,dv\Big)$$

car : $\frac{du}{dv} = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - EG}}{E} = \frac{-F \pm i\Delta}{E}$

On peut égaler séparément l'un des facteurs du 1er membre à l'un ou à l'autre des facteurs du 2e membre, car cela revient à changer i en $-i$, c.à.d. Q en $-Q$; posons donc comme condition :

$$dP + i\,dQ = \mu\left(E\,du - (-F + i\Delta)\,dv\right)$$

En considérant $(P+iQ)$ comme fonction complexe de $(u+iv)$, on tire de cette équation :

$$\frac{\partial P}{\partial u} + i\frac{\partial Q}{\partial u} = \mu E \qquad \frac{\partial P}{\partial v} + i\frac{\partial Q}{\partial v} = \mu(F - i\Delta)$$

Éliminons μ : $(F - i\Delta)\left(\frac{\partial P}{\partial u} + i\frac{\partial Q}{\partial u}\right) = E\left(\frac{\partial P}{\partial v} + i\frac{\partial Q}{\partial v}\right)$

D'où : $F\frac{\partial P}{\partial u} + \Delta\frac{\partial Q}{\partial u} = E\frac{\partial P}{\partial v} \qquad F\frac{\partial Q}{\partial u} - \Delta\frac{\partial P}{\partial u} = E\frac{\partial Q}{\partial v}$

Telles sont les 2 équations aux dérivées partielles du 1er ordre qui lient les 2 fonctions P, Q. On peut en conclure une relation analogue à l'équation de Laplace ; tirons $\frac{\partial Q}{\partial u}$ de la 1e équation et portons-la dans la 2e :

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\left(E\frac{\partial P}{\partial v} - F\frac{\partial P}{\partial u}\right) \qquad \frac{F}{\Delta}\left(E\frac{\partial P}{\partial v} - F\frac{\partial P}{\partial u}\right) - \Delta\frac{\partial P}{\partial u} = E\frac{\partial Q}{\partial v}$$

$$\frac{EF}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{EG}{\Delta}\frac{\partial P}{\partial u} = E\frac{\partial Q}{\partial v} \qquad \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\left(F\frac{\partial P}{\partial v} - G\frac{\partial P}{\partial u}\right)$$

Écrivons que l'on a identiquement : $\frac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 Q}{\partial v\,\partial u}$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\frac{\partial P}{\partial v} - F\frac{\partial P}{\partial u}}{\Delta}\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\frac{\partial P}{\partial u} - F\frac{\partial P}{\partial v}}{\Delta}\right] = 0$$

Cette équation du 2e ordre joue sur la surface le même rôle que l'équation de Laplace dans le plan. Elle définit $(P+iQ)$ comme fonction

complexe analytique sur la surface. Remarquons qu'il n'y a pas ici de variable complexe ; la fonction complexe est fonction du lieu du point (u, v) de la surface.

Entre 2 fonctions complexes analytiques du même point de la surface il existe une relation fort remarquable : on a par définition :

$$dP^2 + dQ^2 = \lambda ds^2 \qquad dP_1^2 + dQ_1^2 = \lambda_1 ds^2$$

Donc

$$dP^2 + dQ^2 = \mu (dP_1^2 + dQ_1^2)$$

$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ étant fonction de (u, v). Ainsi : 2 fonctions analytiques du lieu d'un même point sont fonctions analytiques l'une de l'autre.

Théorème. Soit une fonction $V(x, y)$ satisfaisant à l'équation de Laplace continue et bien déterminée dans tout le plan : si elle reste toujours inférieure en valeur absolue à une quantité finie M, elle se réduit à une constante.

Pour le prouver, rappelons le développement connu en série :

$$V(x, y) = \frac{a_0}{2} + \Sigma \left(\frac{r}{R}\right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cos m\psi \, d\psi \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \sin m\psi \, d\psi$$

ordonné suivant les puissances entières croissantes de r. Les coefficients $\frac{a_m}{R^m}$ et $\frac{b_m}{R^m}$ ne dépendent pas de R : car si l'on passe d'une valeur de R à l'autre, c. à d. d'un cercle à un autre cercle concentrique plus grand, la fonction sera développable par cette série à l'intérieur des 2 cercles ; donc les 2 développements devront être identiques à l'intérieur du 1er et par conséquent (puisqu'ils sont entiers) les coefficients des termes correspondants doivent être identiques ; ils sont donc indépendants de R. Les valeurs de la fonction V sur ~~la~~ une circonférence quelconque sont inférieures à M, donc :

$$|f(\psi)| < M.$$

$$|a_m| < \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi M = 2M \qquad \left|\frac{a_m}{R^m}\right| < \frac{2M}{R^m} \qquad \left|\frac{b_m}{R^m}\right| < \frac{2M}{R^m}$$

Mais, par hypothèse, on peut prendre R aussi grand qu'on veut, donc les coefficients $\frac{a_m}{R^m}$ et $\frac{b_m}{R^m}$ devront être aussi petits qu'on le voudra, et comme ils ne dépendent pas de R, ils doivent être identiquement nuls. Ainsi tous les coefficients a_m, b_m sont nuls, sauf pour $m = 0$; on a donc bien : $V(x, y) = \frac{a_0}{2}$ c.q.f.d.

On peut généraliser cette proposition de la manière suivante, en posant :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Théorème. Si la fonction $V(x, y)$ jouissant des mêmes propriétés que ci-devant, est telle qu'on ait pour tous les points du plan :

$$\frac{|V(x, y)|}{\rho^p} < M \qquad |V(x, y)| < M\rho^p$$

p étant un entier fixe, la fonction V se réduit à un polynôme.

Prenons en effet les intégrales sur une circonférence de rayon R; sur cette circonférence on a : $|f(\varphi)| < MR^p$

$$\left|\frac{a_m}{R^m}\right| < \frac{2MR^p}{R^m} = \frac{2M}{R^{m-p}} \quad \text{et de même :} \quad \left|\frac{b_m}{R^m}\right| < \frac{2M}{R^{m-p}}$$

Donc dès que $m > p$, on peut assigner à $\frac{a_m}{R^m}$, $\frac{b_m}{R^m}$ une limite supérieure aussi petite qu'on veut, et comme ces coefficients sont indépendants de R, ils doivent être identiquement nuls. Alors $V(x, y)$ se réduit à un polynôme entier en x, y du degré p au plus.

Nous allons voir comment on peut étudier de pareilles fonctions, qui existent dans tout le plan pour des valeurs très-grandes de x, y.

Remarquons d'abord que toute transformation qui conserve les angles conserve l'équation de Laplace, c.à.d. qu'à toute fonction satisfaisant

à cette équation correspond une fonction qui y satisfait également (cf. page 97.) Si $V(x,y)$ satisfait à l'équation de Laplace, et si l'on fait :

$x = P(X,Y)$ $\quad y = Q(X,Y)$ la fonction transformée :

$V_1(X,Y)$ satisfait encore à l'équation de Laplace.

En effet, la transformation étant conforme par hypothèse, on a, par définition :

$$dX^2 + dY^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$$

Or à la fonction V on peut associer une fonction W satisfaisant aussi à l'équation de Laplace, et formant ~~avec elle~~ une fonction analytique : on aura donc :

$$dV^2 + dW^2 = \mu(dx^2 + dy^2)$$

et par suite :

$$dV^2 + dW^2 = \mu_1(dX^2 + dY^2)$$

μ_1 ne dépendant que de X, Y, ce qui prouve que $(V + iW)$ est encore une fonction analytique de $(X + iY)$ et par conséquent que $V_1(X,Y)$ satisfait bien à l'équation de Laplace.

Cela posé, on peut, si le point (x,y) tend vers l'infini, le ramener à être voisin de l'origine, par exemple, par la transformation par rayons vecteurs réciproques :

$$X = \frac{k^2 x}{x^2+y^2} \qquad Y = \frac{k^2 y}{x^2+y^2}$$

ces formules sont elles-mêmes réciproques. Si x, y tendent vers l'infini, X, Y tendent vers 0, car ils ont pour expression :

$$\frac{k^2 \cos\theta}{r} \qquad \frac{k^2 \sin\theta}{r} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

On fait ainsi correspondre l'unique point O à l'ensemble des points situés à l'infini ; ~~et comme cette transformation~~ conserve les angles et l'équation de Laplace, on peut ~~ainsi~~ par ce moyen ramener à distance finie la fonction V pour un point qui s'éloigne indéfiniment de l'origine sans en altérer les propriétés. On aura la fonction transformée :

$$V\left(\frac{k^2 X}{X^2+Y^2}, \frac{k^2 Y}{X^2+Y^2}\right)$$ dans le plan xy

satisfaisant encore à l'équation de Laplace, à étudier dans le voisinage de l'origine dans le plan XY.

Soit une fonction continue et parfaitement déterminée dans le plan en dehors d'un certain cercle; on la ramènera à distance finie par la transformation indiquée ci dessus; de $V(x,y)$ elle deviendra $W(X,Y)$. Si le point $(X=0,\ Y=0)$ est un point ordinaire de la fonction W, c.à.d. si cette fonction y est continue ainsi que ses dérivées, les points $(x=\infty,\ y=\infty)$ seront des points ordinaires de la fonction V, et la fonction sera par définition régulière à l'infini.

Revenons au problème de Dirichlet pour la portion du plan extérieure à un contour fermé; il s'agit de trouver une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace, continue et bien déterminée en tous les points extérieurs au contour, prenant sur ce contour une succession de valeurs données; et (condition nécessaire pour déterminer le problème) régulière à l'infini.

Dans ces conditions, le problème extérieur se ramène au problème intérieur. Il suffit d'appliquer la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'aire C relativement à un point intérieur de cette aire; soit Γ la transformée du contour C; le point O sera un point ordinaire pour la ~~transformée~~ fonction transformée;

C
Γ
O
A
a
B
b

on résoudra le problème pour l'aire intérieure à Γ: la fonction correspondante sera déterminée dans l'aire extérieure à C, régulière à l'infini, et prendra sur le contour C des valeurs qui correspondront point par point à celles que prend la première sur le contour Γ.

Notons ici que le problème de Dirichlet appliqué dans l'espace à

une surface fermée subit une modification importante. Le problème intérieur reste soumis aux mêmes conditions; mais pour que le problème extérieur soit déterminé, il faut qu'on exige que la fonction demandée s'annule à l'infini; on est donc obligé de ~~lui~~ assigner la valeur particulière que la transformée doit prendre à l'origine, tandis que dans le plan, il suffit que la fonction soit régulière à l'infini, et la transformée prend à l'origine une valeur déterminée par les conditions du problème.

Fonctions analytiques d'une variable complexe

Théorème (dû à M. Liouville) : Si une fonction $f(z)$ uniforme et continue (holomorphe selon Briot et Bouquet) dans tout le plan, reste en valeur absolue inférieure à une quantité finie M, elle se réduit à une constante.

C'est le théorème démontré plus haut (page 112). En effet, la fonction $f(z)$, analytique, peut s'écrire : $f(z) = V(x,y) + i\,W(x,y)$

V et W satisfaisant à l'équation de Laplace. Si l'on a dans tout le plan : $|f(z)| < M$, on aura a fortiori :

$|V| < M \quad |W| < M$ Donc V et W sont constantes, et $f(z)$ aussi.

Le second théorème s'applique également à une fonction analytique : Si l'on a dans tout le plan : $\left|\dfrac{f(z)}{z^p}\right| < M$

$f(z)$ est un polynôme entier en z.

En effet, posons : $|z| = \rho$ $\quad |f(z)| < M\rho^p$ On a donc à la fois :

$|V| < M\rho^p \quad |W| < M\rho^p$

V et W sont 2 polynômes en x, y du degré p au plus ; par conséquent $f(z)$ est un polynôme entier en z du degré p au plus.

On a vu que si une fonction est holomorphe à l'intérieur d'un cercle, elle peut se développer en série, pour chaque point de ce cercle, suivant les puissances positives croissantes de l'affixe de ce point (x) (v. page 90.)

Théorème de Laurent. Si une fonction est holomorphe dans l'aire comprise entre 2 circonférences concentriques, on peut la développer en

série, pour tout point intérieur de cette aire, suivant les puissances entières positives et négatives de x.

Rappelons la formule de Cauchy, valable pour un contour quelconque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Appliquons-la aux 2 cercles C, C' qui forment le contour total de l'aire considérée, en prenant l'intégrale en sens inverse sur le contour C', ou en changeant son signe si nous la prenons dans le même sens :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Nous savons développer la 1e intégrale en série suivant les puissances entières positives de x ; on a le développement :

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots\dots + A_n x^n + \dots$$

où les différents coefficients sont des intégrales définies de la forme

$$A_n = \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

Ce développement a pu se faire parce que l'on a : $|x| < |z|$ en tous les points intérieurs au cercle C. Pour la 2e intégrale, on ne peut obtenir le même développement, car on a toujours : $|x| > |z|$ à l'extérieur du cercle C' ; mais on peut la développer suivant les puissances croissantes de $\frac{z}{x}$:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{z}{x}-1} = -\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} - \dots \frac{z^n}{x^{n+1}} - \dots$$

On aura alors une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$:

$$+\frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots\dots + \frac{B_n}{x^n} + \dots$$

où les coefficients auront la forme : $B_n = \int_{C'} f(z)\,z^{n-1}\,dz$.

(Ils ont le signe +, puisque la 2e intégrale doit changer de signe dans la somme.)

La fonction est donc représentée en tout point de l'aire annulaire par l'ensemble de ces 2 séries suivant les puissances croissantes de x et de $\frac{1}{x}$, c.à.d. par une série contenant toutes les puissances entières, positives ou négatives, de x.

Il faut remarquer que la 1e série n'est convergente que pour les points intérieurs au cercle C $(|x| < |z|)$ et que la 2e série n'est convergente que pour les points extérieurs au cercle C' $\left(\left|\frac{1}{x}\right| < \left|\frac{1}{z}\right|\right)$; la série totale n'est donc valable que pour l'aire comprise entre C et C'.

Supposons que le cercle intérieur C' diminue indéfiniment, de sorte que la fonction soit holomorphe pour tous les points du cercle C, sauf pour 0. La discontinuité qu'éprouve la fonction en ce point peut être de diverses sortes.

Examinons d'abord le cas où le nombre des termes de la série ordonnée suivant les puissances de x est limité; soit $\frac{B_p}{x^p}$ le dernier. La 2e série constitue un polynôme en $\frac{1}{x}$, qui devient infini pour $x = 0$. Le point 0 est alors un pôle de la fonction, c.à.d. un point où la fonction devient infinie de telle sorte que dans le voisinage de ce point elle puisse se développer en une série de Laurent où le nombre des termes à exposants négatifs est limité. Cette série est ordonnée suivant les puissances de z, si le pôle est l'origine (ce qui est toujours possible) et plus généralement suivant les puissances de $(z-a)$, si a est l'affixe de ce pôle. On dit que le pôle est d'ordre p si p est l'exposant négatif le plus élevé de $(z-a)$.

Nous allons définir, d'après Cauchy, le résidu d'une fonction relatif à un de ses pôles.

Considérons un contour fermé où la fonction $f(z)$ a un certain nombre de pôles d'affixes a, b, c. L'intégrale $\int f(z)\, dz$ prise le long de ce contour serait nulle s'il n'enfermait aucun pôle de $f(z)$.

Dans le cas présent, sa valeur est la somme des valeurs de la même intégrale prise suivant de petits cercles entourant les différents pôles. Calculons une de ces intégrales, prise par exemple autour du pôle a. La fonction $f(z)$ pourra se développer sur la circonférence en série de Laurent :

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots\dots + A_n(z-a)^n + \dots\dots$$
$$+ \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots\dots + \frac{B_p}{(z-a)^p}.$$

Pour avoir $\int_c f(z)dz$, il suffira d'intégrer chacun des termes de la série. Ceux de la 1re ligne donnent des intégrales qui s'annulent quand z tend vers a : or on peut prendre $(z-a)$ aussi petit qu'on veut. Restent les intégrales de la 2e ligne :

$$B_1\int_c \frac{dz}{z-a} + B_2\int_c \frac{dz}{(z-a)^2} + \dots\dots + B_p\int_c \frac{dz}{(z-a)^p}$$

La 1re donne : $\int_c \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$

Toutes les autres sont nulles, car si l'on pose : $z-a = \rho e^{\theta i}$

$$\frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i\rho e^{\theta i}d\theta}{\rho^n e^{n\theta i}} = \frac{i d\theta}{\rho^{n-1}e^{(n-1)\theta i}} \qquad \int_c \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{\rho^{n-1}}\int_c e^{-(n-1)\theta i}d\theta$$

on a une somme complexe de cosinus et sinus qui s'annule de 0 à 2π.

Ainsi l'on a simplement : $\int_c f(z)dz = 2\pi i . B_1 \qquad \frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz = B_1.$

B_1, coefficient de $\frac{1}{z-a}$, s'appelle le <u>résidu</u> de la fonction $f(z)$ relatif au pôle a ; donc :

L'intégrale : $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz$ prise le long d'un contour fermé est égale à la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles enfermés dans ce contour.

Cauchy a appliqué ce théorème à la détermination du nombre des racines d'une équation contenues dans un contour fermé.

Soit l'équation : $f(z) = 0$ On suppose qu'elle n'a pas de racine sur le contour même. On va démontrer que l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

prise le long du contour est égale au nombre des racines qu'il enferme. Nous savons que cette intégrale est la somme des résidus de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ relatifs à ses pôles. Or ces pôles sont les racines de $f(z)$.

Calculons le résidu de cette fonction pour le pôle a, qui est une racine de degré p de $f(z)$: $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z-a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$

$f(z) = (z-a)^p\,\psi(z)$

$\psi(z)$ n'admettant plus par hypothèse la racine a, $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ reste fini en a, et dans le voisinage de a. Le résidu de la fraction par rapport au pôle a est donc p, c.à.d. le degré de multiplicité de la racine a de $f(z)$.

Donc la somme des résidus de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est égale au nombre des racines comptées avec leur degré de multiplicité.

Ce théorème de Cauchy n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale que nous avons démontrée précédemment (v. page 17.)

Étant données 2 équations simultanées : $\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$

en x, y, n'ayant que des racines simples dans un contour donné, et les fonctions P et Q étant continues à l'intérieur de ce contour, nous avons démontré que l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_c d\left(\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_c \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2+Q^2}$$

prise le long du contour dans le sens positif est égale au nombre entier

qui représente l'excès du nombre des racines pour lesquelles le déterminant fonctionnel est positif sur le nombre des racines pour lesquelles le déterminant fonctionnel est négatif (racines enfermées dans le contour.)

Dans le cas particulier d'une fonction analytique d'une variable complexe, on a les relations: $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2$$

Le déterminant fonctionnel est essentiellement positif; donc, dans le cas d'une fonction analytique, et plus généralement, toutes les fois que le déterminant fonctionnel a un signe constant, le théorème précédent s'applique, et permet de déterminer le nombre des racines contenues dans le contour. Il est facile de vérifier que l'intégrale précédente est identique, dans le cas d'une fonction analytique, à $\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

En effet, celle-ci est égale à $\log f(z)$ pris de 0 à 2π.

Or $\log f(z)$ ne change pas ~~de module~~ dans sa partie réelle après un tour complet, seule, sa partie imaginaire ~~son argument~~ varie: or, si l'on pose: $f(z) = P + iQ$

cette ~~argument~~ partie imaginaire est: $i \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$

et sa variation en un tour complet est bien exprimée par l'intégrale

$$\int_c d\left(\operatorname{arctg} \frac{Q}{P}\right) = \int_c \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2}$$

Pour ramener à distance finie les points situés à l'infini, on emploie la transformation: $z = \frac{1}{Z}$ Aux points $z = \infty$ correspond le point $Z = 0$. La fonction $f(z)$ devient $f\left(\frac{1}{Z}\right)$ et pour étudier la fonction $f(z)$ à l'infini, on n'aura qu'à étudier

$f\left(\frac{1}{Z}\right)$ au voisinage de l'origine.
Le point à l'infini sera un pôle de $f(z)$ si l'origine est un pôle pour $f\left(\frac{1}{Z}\right)$ c.à.d. si dans le voisinage de $Z=0$ on peut développer $f\left(\frac{1}{Z}\right)$ en série de la forme:

$$\frac{A_1}{Z^m} + \frac{A_2}{Z^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_m}{Z} + P(Z)$$

$P(Z)$ étant une ~~polynôme~~ série entière en Z; $\alpha + \beta Z + \gamma Z^2 + \cdots$
fonction holomorphe de z dans tout le plan.
Au petit cercle décrit autour du point $Z=0$ correspondra un grand cercle dans le plan z, et à l'aire intérieure au petit cercle correspondra la partie du plan extérieure au grand cercle. Donc, dans cette partie du plan très éloignée de l'origine, la fonction $f(z)$ sera exprimée par la série:

$$f(z) = A_1 z^m + A_2 z^{m-1} + \cdots\cdots + A_m z + \alpha + \frac{\beta}{z} + \frac{\gamma}{z^2} + \cdots$$

qui devient infinie comme un polynôme pour $z=\infty$.
Soit une fonction holomorphe finie dans tout le plan, ayant le point à l'infini pour pôle d'ordre m: $f(z)$.
Elle sera développable par la série précédente pour z suffisamment grand; le quotient: $\frac{f(z)}{z^m}$ a pour limite A_1.
Donc on a, pour des valeurs suffisamment grandes de z:

$$\left|\frac{f(z)}{z^m}\right| < M \qquad M \text{ quantité finie}$$

En vertu d'un théorème précédent, cela prouve que $f(z)$ est un polynôme en z, du degré m au plus. D'où:
<u>Théorème</u>. Une fonction qui n'a d'autre singularité qu'un pôle à l'infini est un polynôme de degré au plus égal à l'ordre de ce pôle.
On peut généraliser ce résultat. Soit une fonction uniforme ayant un nombre limité de pôles, dont un à l'infini: soient a, b, c ses pôles à distance finie, d'ordres α, β, γ. Le produit:

$$f(z)(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma} = P(z)$$

reste fini dans tout le plan, car il est fini pour $z=a$, $z=b$, $z=c$; c'est une fonction holomorphe dans tout le plan. et le point à l'infini ne peut être pour elle qu'un point ordinaire ou un pôle. Dans le 1er cas, $P(z)$ se réduit à une constante; dans le 2e, c'est un polynôme; dans tous les cas, $f(z)$ est une fraction: $\dfrac{P(z)}{(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}}$ c'à d. une fonction rationnelle de z.

Les fonctions uniformes peuvent éprouver d'autres singularités que les pôles — Soit la fonction $e^{\frac{1}{z}}$; elle est déterminée dans tout le plan, mais pour $z=0$ elle n'a plus de sens: les termes du développement en série de $e^{\frac{1}{z}}$ deviennent tous infinis — Le point 0 n'est pas un pôle de la fonction, car autour d'un pôle une fonction tend vers ∞ par des valeurs déterminées, à la façon d'un polynôme. On appelle ces points de discontinuité: points singuliers essentiels; dans l'exemple présent le point singulier essentiel est isolé, c'à d. qu'il n'y a pas d'autre point singulier essentiel dans son voisinage.

On ~~peut~~ va démontrer que quand z tend vers un point singulier essentiel d'affixe a, la fonction peut tendre vers toute valeur donnée à volonté: c'à d., plus précisément, que si l'on se donne une valeur A quelconque et un nombre positif ε aussi petit qu'on veut, dans tout cercle, si petit qu'il soit, décrit autour du point a il y aura toujours une infinité de points pour lesquels on aura:

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Une fonction uniforme peut d'ailleurs avoir une infinité de pôles dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé; par exemple: $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ est une fonction qui n'a aucun sens pour $z=0$. Elle devient infinie pour un nombre infini de valeurs de z:

$$\sin\frac{1}{z} = 0 \qquad \frac{1}{z} = k\pi \qquad z = \frac{1}{k\pi}$$

Quand on substitue à k tous les nombres entiers consécutifs, on obtient les pôles de la fonction : c'est une suite de points situés sur l'axe des quantités réelles et ayant pour limite le point singulier essentiel O : donc il y en a une infinité dans tout cercle, si petit qu'il soit, tracé autour de l'origine.

Revenons à la démonstration du théorème annoncé. (qui est dû à M. Weierstrass.) Considérons la fonction :

$$\frac{1}{f(z) - A}$$

Si elle a une infinité de pôles dans le voisinage du point singulier essentiel a, le théorème est démontré, car on devra alors avoir :

$$f(z) - A = 0 \quad \text{ou} \quad f(z) = A$$

pour ces pôles, c.à.d. que l'équation $f(z) = A$ a un nombre infini de racines au voisinage du point a ; on a donc à fortiori en ces points :

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

Si la fonction considérée n'a qu'un nombre fini de pôles aux environs du point a, on pourra décrire autour de $\underline{a}$ un cercle assez petit pour que la fonction n'y ait aucun pôle, et par conséquent y soit holomorphe en tout point, sauf en a. On pourra alors développer la fonction en série de Laurent dans tout le cercle, le p. a étant exclu :

$$\frac{1}{f(z) - A} = \alpha + \frac{\alpha_1}{z-a} + \frac{\alpha_2}{(z-a)^2} + \cdots$$
$$+ \beta_1(z-a) + \beta_2(z-a)^2 + \cdots$$

La 1e série est convergente pour toute valeur de z sauf pour $z = a$; on la rendra entière en posant : $\frac{1}{z-a} = z'$.

La série transformée : $\alpha + \alpha_1 z' + \alpha_2 z'^2 + \cdots$ sera convergente pour toute valeur finie de z' ; c'est une fonction holomorphe dans tout le plan. Mais alors, en vertu du théorème de Liouville,

on pourra prendre $|z'| > R$ rayon d'un cercle de centre O,
et assez grand pour que le module de la série soit supérieur à un nombre donné quelconque M (car la série n'est évidemment pas constante.) Or aux valeurs : $|z'| > R$
correspondent des valeurs de z voisines de a ; donc la 1e série peut devenir plus grande que toute quantité donnée pour des valeurs de z suffisamment voisines de a ; d'autre part, la 2e série reste finie et tend vers 0 quand z tend vers a ; donc la double série de Laurent tend vers l'infini, ce qui prouve que son inverse : $f(z) - A$ tend vers 0, c.à.d. qu'on a à l'intérieur d'un cercle assez petit de centre a :

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

c.q.f.d.

On voit ainsi que les points singuliers essentiels sont bien des points d'indétermination, puisque la fonction peut tendre vers toute valeur donnée quand le point z tend vers ces points.

Le théorème précédent n'apprend rien sur la nature et le nombre des racines de l'équation : $f(z) = A$ dans le voisinage du point singulier essentiel. On démontre que, quel que soit A, l'équation $f(z) = A$ a une infinité de racines au voisinage du point a. Il ne peut y avoir que 2 exceptions, pour 2 valeurs distinctes de la constante arbitraire A, ~~mais~~ jamais 3 ni davantage.

Exemples : La fonction $e^{\frac{1}{z}}$ ne peut jamais devenir égale ni à 0 ni à ∞ au voisinage de son point singulier essentiel O ; mais pour toute autre valeur de A : $0 < |A| < \infty$
l'équation : $e^{\frac{1}{z}} = A$ a une infinité de racines.

Posons : $A = Re^{\alpha i}$ $\quad \frac{1}{z} = \log A = \log R + i(\alpha + 2K\pi)$

$$z = \frac{1}{\log R + i(\alpha + 2K\pi)}$$

où $K = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

La fonction : $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ admet le point singulier essentiel 0 ;
l'équation : $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1} = A$
a une infinité de racines pour A différent de 0 et de 1, et aucune racine pour $A=0$, $A=1$; ici les 2 valeurs exceptionnelles de A sont finies.

La fonction : $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ ne devient jamais nulle pour $z \gtrless 0$, et pour $z=0$ elle n'a pas de sens ; son point singulier essentiel est 0. Mais pour toute valeur : $A \gtrless 0$, l'équation :
$\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}} = A$ admet une infinité de racines.

Dans ce cas, A n'a qu'une valeur exceptionnelle.
Enfin, le plus souvent, l'équation $f(z) = A$ a une infinité de racines pour toute valeur de A ; A n'a aucune valeur exceptionnelle.

Une fonction holomorphe dans tout le plan n'ayant de point singulier essentiel qu'à l'infini se rapproche beaucoup d'un polynôme : on l'appelle fonction entière de z. On sait qu'une telle fonction se réduit à un polynôme si elle a un pôle à l'infini ; si elle a un point singulier essentiel à l'infini, ce sera une fonction transcendante développable en série convergente suivant les puissances croissantes de z dans tout le plan. Nous avons déjà vu que e^z, $\sin z$, $\cos z$ sont des fonctions entières.

On sait qu'un polynôme entier en z peut se décomposer d'une manière unique en un produit de facteurs premiers qui sont des binômes du 1er degré :
$$P(z) = A\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$
$a_1, a_2, \ldots a_n$ étant les racines de l'équation : $P(z)=0$.

On a cherché un développement analogue pour une fonction entière $G(z)$. Si le nombre des racines de l'équation : $G(z) = 0$, est fini, il n'y a aucune difficulté à appliquer la même méthode qu'aux polynômes ; mais s'il y a une infinité de racines, on ne peut plus l'employer : par exemple l'équation : $\sin z = 0$ a une infinité de racines qui vont en croissant indéfiniment : $z = k\pi$. On ne sait si la fonction peut être encore représentée par le produit infini dans ce cas, des binômes où figurent ses racines.

Cauchy a cherché à résoudre ce problème, il l'a poussé assez loin ; mais M. Weierstrass en a trouvé une solution fort simple et par là même définitive. Avant de l'exposer, nous ~~établirons~~ rappellerons la proposition suivante :

Lemme. Soit une série : $f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$ dont tous les termes sont eux-mêmes des séries convergentes ayant toutes le même cercle de convergence. Supposons que dans chacune d'elles on remplace chaque terme par son module ; soit $Z_1 = |z|$ on aura une série à termes positifs :

$$F_1(Z_1) + F_2(Z_1) + \dots + F_n(Z_1) + \dots$$

Si la 2e série est convergente, la 1e le sera aussi à l'intérieur du cercle et elle représentera dans ce cercle une fonction de z pouvant être ordonnée suivant les puissances croissantes de z : en effet, on peut intervertir l'ordre des termes d'une série absolument convergente.

— Soit maintenant la fonction entière : $G(z)$ (inconnue) admettant les racines : $a_1\ a_2 \dots a_n \dots$ en nombre infini, et tendant vers ∞ quand n croît indéfiniment.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

On les suppose rangés par ordre de modules croissants, les racines de même module étant dans un ordre quelconque : il n'y a d'ailleurs qu'un

nombre limité de racines ayant un même module, car autrement, si loin qu'on aille dans la suite, on trouverait une racine a_n de ce module, et on ne pourrait avoir : $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.

Cela posé, on peut former un produit infini qui soit une fonction entière, holomorphe dans tout le plan, admettant pour racines $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ autrement dit, on peut construire la fonction $G(z)$ sous forme de produit.

Prenons le facteur général :

$$u_n = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}$$

où l'exposant de e est un polynôme de degré $(n-1)$ en z : on va démontrer que le produit obtenu en faisant dans ce facteur $\underline{n}$ égal à $1, 2, 3 \ldots\ldots$ est la fonction entière cherchée.

Il est manifeste, d'abord, que le produit infini ainsi formé aura pour racines les quantités : $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ et seulement celles-là : car en multipliant chaque facteur binôme par l'exponentielle, on n'ajoute aucune racine.

Il reste à démontrer que ce produit infini est une fonction finie de z, c.à.d. qu'il est convergent.

Donnons à z une valeur fixe ; nous pouvons négliger le nombre fini des racines dont le module ne surpasse pas celui de z, et faire commencer le produit infini au premier terme qui contient $|a_1| > |z|$.

Appelons u_n le facteur primaire considéré ; on aura :

$$\log u_n = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{a_n^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n-1}\frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}}$$

On prendra pour $\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ la détermination qui s'annule pour $z = 0$. On peut le développer en série, puisque par hypothèse $|z| < |a_n|$:

$$\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{a_n^3} - \cdots - \frac{1}{n-1}\frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}} - \frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n} - \cdots$$

Les (n-1) premiers termes disparaissent dans la somme, et il reste :

$$\log u_n = -\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n} - \frac{1}{n+1}\frac{z^{n+1}}{a_n^{n+1}} - \cdots\cdots \qquad \text{d'où :}$$

$$u_n = e^{-\frac{1}{n}\frac{z^n}{a_n^n} - \frac{1}{n+1}\frac{z^{n+1}}{a_n^{n+1}} - \cdots\cdots}$$

L'exposant de e étant une série infinie ; les facteurs primaires se réduisant à des exponentielles, pour faire leur produit on devra ajouter les exposants, c.à.d. faire la somme d'un nombre infini de séries obtenues en faisant dans $\log u_n$: $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

Chacune de ces séries est convergente ; mais leur somme l'est-elle ? En vertu du lemme précédent, elle sera convergente si la somme des séries où chaque terme sera remplacé par son module est convergente.

Désignons les modules par des majuscules ; ~~la série~~ la série deviendra :

$$\frac{1}{n}\frac{Z^n}{A_n^n} + \frac{1}{n+1}\frac{Z^{n+1}}{A_n^{n+1}} + \cdots\cdots = \frac{1}{n}\frac{Z^n}{A_n^n}\left[1 + \frac{n}{n+1}\frac{Z}{A_n} + \frac{n}{n+2}\frac{Z^2}{A_n^2} + \cdots\cdots\right]$$

$$< \frac{1}{n}\frac{Z^n}{A_n^n}\left[1 + \frac{Z}{A_n} + \frac{Z^2}{A_n^2} + \cdots\cdots\right] = \frac{1}{n}\cdot\frac{Z^n}{A_n^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{Z}{A_n}}$$

Or le facteur $\frac{1}{1-\frac{Z}{A_n}}$ tend vers 1 par des valeurs inférieures, car A_n augmente indéfiniment.

L'exposant de e (dans le facteur u_n) est donc à ~~fortiori~~ $< \frac{1}{n}\cdot\frac{Z^n}{A_n^n}$ en valeur absolue

Considérons la série de ces exposants, qui est l'exposant total de e :

$$\frac{Z}{A_1} + \frac{1}{2}\frac{Z^2}{A_2^2} + \frac{1}{3}\frac{Z^3}{A_3^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{Z^n}{A_n^n} + \frac{1}{n+1}\frac{Z^{n+1}}{A_{n+1}^{n+1}} + \cdots\cdots$$

Le rapport d'un terme au précédent est :

$$\frac{n}{n+1}\cdot Z\cdot\frac{A_n^n}{A_{n+1}^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\cdot Z\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)^n\frac{1}{A_{n+1}} \qquad \text{Or } \frac{A_n}{A_{n+1}} \leq 1$$

donc ce rapport est au plus égal à : $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{Z}{A_{n+1}}$

Mais par hypothèse A_{n+1} augmente indéfiniment, donc le rapport de 2 termes consécutifs tend vers 0 ; la série est convergente, et a fortiori l'exposant total de e est une série absolument convergente : le produit infini

$$u_1 u_2 \ldots\ldots u_n \ldots\ldots = e^{\log u_1 + \log u_2 + \ldots\ldots + \log u_n + \ldots}$$

est convergent ; c'est une fonction entière ayant pour racines les racines données à l'avance, sous la seule condition que les modules de ces racines croissent indéfiniment.

— La méthode de décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires, que nous venons d'exposer, est générale ; mais elle comporte, suivant les cas, diverses simplifications. Quand il y a une racine nulle d'ordre λ, il suffira d'introduire dans le produit le facteur z^λ.

Si la série : $\frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \ldots\ldots + \frac{1}{|a_n|} + \ldots$

est convergente, il suffira de prendre pour facteur primaire :

$$u_n = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

En effet, donnons à z une valeur déterminée, et prenons seulement les facteurs primaires où : $|a_n| > |z|$ On aura :

$$\log u_n = -\frac{z}{a_n} - \frac{z^2}{a_n^2} \ldots\ldots \qquad u_n = e^{-\frac{z}{a_n} - \frac{z^2}{a_n^2} \ldots\ldots}$$

Pour faire le produit des u_n, il suffit de faire la somme des exposants de e : c'est une série dont chaque terme est (une série) de la forme :

$$\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{a_n^2} + \ldots\ldots \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

Or la somme de cette série est : $\frac{z}{a_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a_n}} < \frac{z}{a_n}$

et la série totale a une somme moindre que la série convergente :

$$\frac{z}{a_1}+\frac{z}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{z}{a_n}+\cdots\cdots=z\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots\cdots\right)$$

Le produit infini : $u_1 u_2 \dots\dots u_n \dots$ sera donc encore convergent, c.q.f.d.

Supposons plus généralement que la série :

$$\frac{1}{|a_1|^p}+\frac{1}{|a_2|^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{|a_n|^p}+\cdots\cdots$$

soit convergente. On pourra prendre pour facteur primaire :

$$u_n=\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p-1}\frac{z^{p-1}}{a_n^{p-1}}}$$

Si grand que soit n, l'exposant de e sera toujours un polynôme de degré $(p-1)$. On aura donc :

$$\log u_n=-\frac{z}{a_n}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}-\cdots\cdots-\frac{1}{p-1}\frac{z^{p-1}}{a_n^{p-1}}-\frac{1}{p}\frac{z^p}{a_n^p}-\cdots\cdots$$
$$+\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{a_n^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p-1}\frac{z^{p-1}}{a_n^{p-1}}$$

donc : $$u_n=e^{-\frac{1}{p}\frac{z^p}{a_n^p}-\frac{1}{p+1}\frac{z^{p+1}}{a_n^{p+1}}-\cdots\cdots}$$

La somme des exposants sera une série dont chaque terme est une série qui devient, si l'on remplace chaque terme par sa valeur absolue :

$$\frac{1}{p}\frac{Z^p}{A_n^p}+\frac{1}{p+1}\frac{Z^{p+1}}{A_n^{p+1}}+\cdots\cdots$$

Cette série est plus petite que : $\frac{1}{p}\left(\frac{Z^p}{A_n^p}+\frac{Z^{p+1}}{A_n^{p+1}}+\cdots\right)=\frac{1}{p}\frac{Z^p}{A_n^p}\left(\frac{1}{1-\frac{Z}{A_n}}\right)$

Donc la série totale est inférieure à la série convergente :

$$\frac{1}{p}\frac{Z^p}{A_1^p}+\frac{1}{p}\frac{Z^p}{A_2^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{p}\frac{Z^p}{A_n^p}+\cdots=\frac{Z^p}{p}\left(\frac{1}{A_1^p}+\frac{1}{A_2^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{A_n^p}+\cdots\cdots\right)$$

et le produit infini ; $u_1 u_2 \dots u_n \dots$ est encore convergent.

Ainsi nous avons une méthode générale pour former une fonction entière $G(z)$ ayant pour racines : $a_1\, a_2 \dots a_n \dots$ et celles là seulement.

Théorème. Une fonction qui n'a que des pôles dans le plan et un point singulier essentiel à l'infini peut se représenter par un quotient de 2 fonctions entières.

Soit la fonction uniforme $f(z)$ ayant pour pôles les points, en nombre infini : $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.

Formons la fonction $G(z)$ entière ayant pour racines les pôles de $f(z)$ avec le même degré de multiplicité — Le produit : $f(z)\,G(z)$ reste fini pour tous les pôles de $f(z)$, car au voisinage de ces pôles, du pôle a_1, par exemple, d'ordre α, on a le développement :

$$f(z) = \frac{A_1}{(z-a_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(z-a_1)^{\alpha-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_\alpha}{z-a_1} + \ldots\ldots$$

et d'autre part : $G(z) = (z-a_1)^\alpha G_1(z)$ Donc :

$f(z)\,G(z) = G_1(z)$ fonction entière, n'ayant pas de pôle ; d'où : $f(z) = \dfrac{G_1(z)}{G(z)}$ quotient de 2 fonctions entières qui n'ont pas de racine commune, car quand $G(z)$ s'annule (en un pôle de $f(z)$) $G_1(z)$ reste finie.

— Remarquons que $G(z)$, telle que nous savons la construire, n'est pas la seule fonction entière admettant les racines $a_1, a_2, \ldots\, a_n \ldots\ldots$ Soit $H(z)$ une autre fonction admettant les mêmes racines. Le quotient : $\dfrac{G(z)}{H(z)} = Q(z)$ est une fonction entière qui ne s'annule jamais. Sa dérivée logarithmique : $\dfrac{Q'(z)}{Q(z)}$ ne devient jamais infinie, donc c'est une fonction entière : $= P(z)$.

On en conclut : $\log Q(z) = \int P(z)\,dz$ $Q(z) = e^{\int P(z)\,dz}$

Or l'intégrale d'une fonction entière est aussi une fonction entière : donc 2 fonctions entières qui ont les mêmes racines ne diffèrent que par un facteur : $e^{K(z)}$ où $K(z)$ est une fonction entière de z.

Une fonction entière a pour point singulier essentiel le point à l'infini; mais on peut le ramener à distance finie par le changement de variables:

$$Z = \frac{1}{z-a}$$

Cette transformation (par rayons vecteurs réciproques issus du point a) donne le point singulier essentiel: $z = a$

Considérons en particulier le point 0, ~~comme point et~~ et une suite de points: $a_1\, a_2, \dots a_n \dots$ ayant pour limite ce point. On peut former une fonction qui ait pour point singulier essentiel 0, et pour racines $a_1, a_2 \dots a_n \dots$

En effet, prenons le facteur primaire suivant:

$$u_n = \left(1 - \frac{a_n}{z}\right) e^{\frac{a_n}{z} + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{z^2} + \dots\dots + \frac{1}{n-1}\frac{a_n^{n-1}}{z^{n-1}}}$$

Le produit $u_1 u_2 \dots u_n \dots$ sera convergent pour toute valeur de z différente de 0, et aura pour racines les points $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ qui tendent vers l'origine. Il suffit de remarquer que ce produit est déduit de celui que nous avons étudié plus haut par le changement de z en $\frac{1}{z}$ et de a en $\frac{1}{a}$; les pôles sont devenus des racines, et le point singulier essentiel est 0 au lieu d'être ∞, sans cesser d'être la limite des p. $a_1 a_2 \dots a_n \dots$

Le même raisonnement s'appliquerait à un point singulier essentiel quelconque b: la fonction entière qui a pour point singulier essentiel b sera: $G\left(\frac{1}{z-b}\right)$

Nous allons chercher la forme générale des fonctions qui ont un certain nombre de points singuliers essentiels. Soient $b_1\, b_2 \dots b_n$ n points singuliers essentiels; on peut toujours les supposer à distance finie, car on vient de voir comment on ramène à distance finie un

point singulier essentiel à l'infini. Supposons d'abord que la fonction n'ait pas de pôles. On sait que dans le voisinage du point b_1 la fonction peut se mettre sous la forme d'une série de Laurent :

$$f(z) = A_0 + \frac{A_1}{z-b_1} + \frac{A_2}{(z-b_1)^2} + \dots\dots$$

$$+ B_1(z-b_1) + B_2(z-b_1)^2 + \dots\dots$$

La 1e ligne de la série peut s'écrire ; $G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)$ car c'est une fonction entière de $\frac{1}{z-b_1}$ définie pour toute valeur de z différente de b_1. Donc, si l'on retranche de $f(z)$ la fonction entière $G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)$, la différence sera une fonction dont le point b_1 sera un point ordinaire. On supprimera de même les autres points $b_2\ b_3 \dots b_n$, au moyen des fonctions entières $G_2\left(\frac{1}{z-b_2}\right)$, $G_3\left(\frac{1}{z-b_3}\right) \dots\dots G_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$.

La différence :
$$f(z) - G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right) - G_2\left(\frac{1}{z-b_2}\right) - \dots\dots - G_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$
est une fonction qui n'a aucun point singulier essentiel, ni aucun pôle. Puisqu'elle n'éprouve aucune discontinuité dans tout le plan, même pas à l'infini, elle se réduit à une constante qu'on pourra faire rentrer dans une des fonctions G, et on aura le développement cherché :

$$f(z) = G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-b_2}\right) + G_3\left(\frac{1}{z-b_3}\right) + \dots\dots + G_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

Ainsi une fonction qui a <u>n</u> points singuliers essentiels et aucun pôle peut se représenter par une somme de n fonctions entières ayant chacune pour pôle unique l'un de ces points singuliers essentiels.

Cette démonstration ne s'applique plus au cas où la fonction a aussi des pôles. Supposons qu'une fonction ait un nombre fini ou infini de pôles autour de chaque point singulier essentiel $b_1, b_2, \dots\dots b_n$.

On partagera le plan en n circonscriptions contenant chacune un point singulier essentiel et les pôles voisins, de sorte que tous les pôles soient répartis, d'une manière arbitraire d'ailleurs, entre ces n portions de plan. On formera la fonction entière $G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)$ ayant pour point singulier essentiel b_1 et pour racines les pôles contenus dans la même circonscription que b_1 ; de même $G_2\left(\frac{1}{z-b_2}\right) \ldots\ldots G_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$.

Le produit : $$f(z)\, G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right) G_2\left(\frac{1}{z-b_2}\right) \ldots\ldots\ldots G_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

n'a aucun pôle, car il reste fini en tous les pôles de $f(z)$, et il a les n points singuliers essentiels de $f(z)$; donc, en vertu du théorème précédent, il peut se mettre sous la forme : $$\sum_1^n \Gamma_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)$$

Γ désignant des fonctions entières. D'autre part, le produit :

$$G_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right) G_2\left(\frac{1}{z-b_2}\right) \ldots\ldots\ldots G_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$$

est une fonction qui a n points singuliers essentiels et aucun pôle, donc il peut aussi se mettre sous la forme : $$\sum_1^n H_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)$$

H désignant des fonctions entières. Donc :

$$f(z) = \frac{\sum \Gamma_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)}{\sum H_1\left(\frac{1}{z-b_1}\right)}$$

Ainsi une fonction qui a un nombre fini de points singuliers essentiels avec des pôles est égale au quotient de 2 sommes de fonctions entières, ou de 2 fonctions n'ayant que des points singuliers essentiels.

Nous avons vu plus haut que si une fonction a pour point singulier essentiel l'origine et des pôles $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ ayant pour limite 0, elle peut se mettre sous la forme du produit infini :

$$\Pi\left(1-\frac{a_n}{z}\right) e^{\frac{a_n}{z}+\frac{1}{2}\frac{a_n^2}{z^2}+\ldots\ldots}$$

Supposons que la fonction ait une suite infinie de racines tendant, non plus vers l'origine, mais vers un cercle de centre O et de rayon R :

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = R .$$

On peut former une fonction holomorphe dans tout le plan, sauf sur la circonférence, qui admette les racines $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$

Ce sera une fonction ayant une infinité de points singuliers essentiels.

Posons : $a_n = r_n e^{i\alpha_n}$ $\lim_{n=\infty} r_n = R$.

A chaque point a_n faisons correspondre un point b_n de la circonférence de telle sorte que la différence de a_n et de b_n tende vers O quand n augmente indéfiniment : $\lim_{n=\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Cela peut se faire d'une infinité de manières ; prenons par exemple :

$$b_n = R e^{i\alpha_n}$$

c'est l'extrémité du rayon qui passe par a_n. $\lim_{n=\infty} a_n = b_n$.

Formons le facteur primaire :

$$u_n = \frac{z - a_n}{z - b_n} \cdot e^{\frac{b_n - a_n}{z - b_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{b_n - a_n}{z - b_n}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{b_n - a_n}{z - b_n}\right)^{n-1}}$$

Il est analogue à celui que nous avons considéré plus haut (page 134) et en est tiré en remplaçant z par $(z - b_n)$ et a_n par $(b_n - a_n)$, qui tend aussi vers O. Le produit : $u_1 u_2 \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$ est donc une fonction holomorphe pour tout point non situé sur la circonférence : $|z| \gtrless R$ et il admet pour racines : $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \ldots$

Cette fonction est définie à l'intérieur et à l'extérieur de la circonférence ; mais les 2 fonctions ainsi séparées ne sont pas en général le prolongement analytique l'une de l'autre.

Les remarques que nous avons faites sur les fonctions entières décomposées en facteurs primaires s'appliquent encore ici.

Si la série des modules : $|b_n - a_n|$ est convergente, le facteur primaire se réduit à : $\dfrac{z-a_n}{z-b_n}$

Si la série des puissances : $|b_n - a_n|^p$ est convergente, on pourra limiter l'exposant de e aux $(p-1)$ premiers termes dans chaque facteur primaire.

L'application de ce théorème comporte une certaine latitude à cause du choix arbitraire de b_n.

Supposons pour simplifier : $R=1$. Prenons pour racines les quantités définies par la formule : $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $k = 1, 2, 3, \ldots\ n$.

Les n points a_n sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans la circonférence de rayon $1-\frac{1}{n}$. Quand n augmente indéfiniment, cette circonférence tend vers le cercle de rayon 1, et le nombre des points tend vers ∞ ; ils tendent tous en même temps vers tous les points de la circonférence de rayon 1. Prenons : $b_n = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$

Nous pouvons ici trouver un exposant p tel que la série des modules : $|b_n - a_n|^p$ soit convergente. En effet :

$|b_n - a_n| = \frac{1}{n} e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $\qquad |b_n - a_n| = \frac{1}{n}$ $\qquad \sum_{k=1}^{k=n} |b_n - a_n|^p = \frac{1}{n^{p-1}}$

La série dont le terme général est $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$; comme p doit être entier, nous prendrons $p = 3$: le facteur primaire se réduit alors à : $\dfrac{z-a_n}{z-b_n}\, e^{\frac{b_n-a_n}{z-b_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{b_n-a_n}{z-b_n}\right)^2}$

Le produit contient n facteurs de cette forme, car b_n a n valeurs correspondant à celles de a_n. Le produit infini de tous ces facteurs sera convergent, et définira la fonction à l'intérieur et à l'extérieur du cercle de rayon 1. On voit qu'elle a une infinité de racines ds le voisinage

de tout point de la circonférence ; donc toute la circonférence est pour elle un lieu de singularité. Elle ne peut donc, dans le cas présent, s'étendre analytiquement au-delà de la circonférence.

— Nous allons calculer certaines intégrales très-importantes dont nous aurons besoin dans la suite.

Nous partirons de l'intégrale connue : $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Dans un système d'axes rectangulaires Oxy, menons une droite issue de l'origine OA, faisant avec Ox un angle $\alpha < \frac{\pi}{4}$, et formons un secteur en traçant un arc de rayon quelconque entre Ox et OA. Prenons l'intégrale :

$$\int e^{-z^2} dz$$

le long du contour de ce secteur.

On va prouver que lorsque le rayon de l'arc augmente indéfiniment, l'intégrale prise le long de cet arc diminue indéfiniment. Posons :

$$\begin{cases} z^2 = R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ dz = R(-\sin\theta + i\cos\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

L'intégrale prise le long de l'arc devient :

$$\int_0^{\alpha} R e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} (-\sin\theta + i\cos\theta)\, d\theta$$

Or, quand R croît au-delà de toute limite, les éléments différentiels : $Re^{-R^2 \cos 2\theta}$ et $Re^{-R^2 \sin 2\theta}$ deviennent plus petits que toute quantité donnée ; c.à.d. que pour $R = \infty$, l'intégrale se réduit à 0. Donc si l'on suppose le rayon infiniment grand, l'intégrale prise le long de OA est égale à l'intégrale prise le long de Ox :

$$\int_{OA} e^{-z^2}\,dz = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Or quand z se déplace sur OA, r seul varie ; la 1e intégrale peut donc s'écrire :

$$\int_0^\infty e^{-r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,dr = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\int_0^\infty e^{-r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)}\,dr$$

Développons l'exponentielle imaginaire : $e^{-ir^2\sin 2\alpha}$

$$e^{i\alpha}\int_0^\infty e^{-r^2\cos 2\alpha}\left[\cos(r^2\sin 2\alpha) - i\sin(r^2\sin 2\alpha)\right]dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

équation qui se dédouble en :

$$e^{i\alpha}\int_0^\infty e^{-r^2\cos 2\alpha}\cos(r^2\sin 2\alpha)\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et :

$$\int_0^\infty e^{-r^2\cos 2\alpha}\sin(r^2\sin 2\alpha)\,dr = 0.$$

Le raisonnement précédent ne s'applique plus au cas où α atteint sa limite supérieure : $\frac{\pi}{4}$; car on a supposé que l'élément différentiel : $Re^{-R^2\cos 2\theta}$ tend vers 0.

Or pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, il devient : $Re^0 = R$ qui est infiniment grand avec R ; ainsi dans ce cas extrême, tous les éléments sont encore nuls (infiniment petits pour $R = \infty$) sauf le dernier, qui correspond à : $\theta = \frac{\pi}{4}$ et qui devient au contraire infini.

Néanmoins, les conclusions précédentes sont encore vraies pour ce cas. En effet, les intégrales obtenues plus haut sont des fonctions continues de α même pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$: on le prouverait en considérant la courbe : $y = e^{-x^2\cos 2\alpha}\sin(x^2\sin 2\alpha)$ qui a une infinité de points

d'inflexion sur l'axe des x ; l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\alpha}\sin(x^2\sin 2\alpha)\,dx$ est la somme des aires comprises entre l'axe des x et les boucles successives de la courbe de part et d'autre de Ox ; c'est une série convergente, qui est fonction continue de α. Donc les résultats précédents s'appliquent au cas où $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

L'intégrale totale devient : $(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty(\cos x^2 - i\sin x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ou $\int_0^\infty (1+i)(\cos x^2 - i\sin x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ qui se dédouble en :

$\int_0^\infty \cos x^2\,dx + \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx - \int_0^\infty \sin x^2\,dx = 0.$

d'où : $\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ intégrales de Fresnel

Nous allons maintenant appliquer le théorème des résidus à la recherche de certains développements en série comprenant comme cas particulier la série de Fourier (mémoire de Cauchy sur les séries trigonométriques).

Considérons une fonction : $F(z)$ qui n'a que des pôles dans le plan. Si l'on trace de l'origine comme centre un cercle de rayon quelconque, on aura le long de ce cercle, en vertu du théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz = \Sigma R$$

somme des résidus relatifs aux pôles de la fonction F situés à l'intérieur du cercle ; on peut toujours trouver un cercle qui entoure tous les pôles de F, s'ils sont en nombre fini ; sinon, le cercle devra croître indéfiniment.

Supposons qu'on ait une suite de quantités réelles et positives : $r_1\ r_2 \ldots\ldots r_n \ldots$ tendant vers ∞,

$$\lim_{n=\infty} r_n = \infty$$

et telles que $z\,F(z)$ tende vers une limite finie F quand $|z|$ croît par les valeurs $r_1\, r_2 \ldots\ldots r_n \ldots\ldots$ $\lim z\,F(z) = F$

Si l'on pose : $z = r_n e^{\varphi i}$ on doit avoir, plus exactement :

$$\lim_{n=\infty} r_n e^{\varphi i}\, F(r_n e^{\varphi i}) = F \qquad \text{quel que soit } \varphi.$$

Toutefois, on peut supposer que cela n'ait pas lieu pour un nombre limité de valeurs de φ, pourvu que $z\,F(z)$ reste fini pour ces valeurs.

Intégrons $F(z)$ le long de la circonférence de rayon r_n :

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz = \Sigma R$$

Le 2e membre est une certaine série formée par les résidus. Cherchons quelle est la limite, pour $n = \infty$, du 1er membre. L'intégrale peut s'écrire : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r_n e^{\varphi i})\, r_n e^{\varphi i}\, d\varphi$

On voit que l'élément différentiel est $z\,F(z)$ qui tend vers F ; donc l'intégrale a pour limite : $\frac{F}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = F.$

Cela reste vrai, même quand certains éléments, en nombre fini ne seraient pas égaux à F à la limite, pourvu qu'ils restent finis.

On a donc : $F = \Sigma R$

ce qui montre que la constante F se trouve développée en une série de résidus, si le nombre des pôles est infini. Tel est le principe de la méthode du développement en série.

Écrivons la condition sous une forme un peu différente ; au lieu de : $\lim z\,F(z) = F$, écrivons : $\lim \frac{1}{2}\left[z\,F(z) - z\,F(-z)\right] = F$

Il est aisé de voir que cette 2e condition équivaut à la 1re ; elle nous permettra de ne considérer que les valeurs positives de z.

L'intégrale peut s'écrire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(r_n e^{\varphi i}) r_n e^{\varphi i} d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(r_n e^{\varphi i}) r_n e^{\varphi i} d\varphi$$

en changeant seulement les limites de l'intervalle 2π. Remplaçons dans la 2e intégrale φ par $(\varphi'+\pi)$, pour lui donner les mêmes limites qu'à la 1re elle devient :

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(-r_n e^{\varphi i}) r_n e^{\varphi i} d\varphi$$

et l'intégrale totale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r_n e^{\varphi i}\left[F(r_n e^{\varphi i}) - F(-r_n e^{\varphi i})\right] d\varphi = \Sigma R \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{r_n e^{\varphi i}}{2} \cdot -$$

On a ainsi ramené l'élément différentiel à la forme :

$$\frac{1}{2}\left[z F(z) - z F(-z)\right]$$

On peut désormais supposer qu'on ne donne à z que des valeurs dont la partie réelle est positive ou nulle, c.à.d. allant de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ à $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. Il suffira dès lors que la condition :

$$\lim \frac{1}{2}\left[z F(z) - z F(-z)\right] = F'$$

soit vérifiée par les valeurs positives ou nulles de z ; on voit que cette nouvelle forme est plus commode.

Supposons en outre que $F(z)$ ait la forme suivante :

$$\frac{\psi(z)\,\varphi(z,x)}{\Pi(z)}$$

où ψ et Π sont des fonctions holomorphes de z, φ est aussi une fonction holomorphe de z, mais elle dépend d'une variable réelle x qui joue le rôle d'un paramètre. F', limite de $z F(z)$, sera donc

fonction de x. D'autre part, les pôles de $F(z)$ seront les racines de $\Pi(z)$; nous supposons que leur nombre est infini. Soit λ une de ces racines, simple par hypothèse ; le résidu de $F(z)$ pour le pôle λ sera :

$$\frac{\psi(\lambda)\varphi(\lambda, x)}{\Pi'(\lambda)}$$

car tel est bien le coefficient de $\frac{1}{z-\lambda}$ dans le développement de $F(z)$ en fractions simples. On aura donc pour le développement cherché :

$$F(x) = \Sigma R = \Sigma \frac{\psi(\lambda)\varphi(\lambda, x)}{\Pi'(\lambda)}$$

somme étendue à toutes les racines de l'équation transcendante :

$$\Pi(z) = 0.$$

Prenons maintenant : $\varphi(z, x) = \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$

$(x > x_0)$

$f(\mu)$ étant une fonction de la variable réelle μ n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima.

Rappelons ici le 2e théorème de la moyenne (dû à M. O. Bonnet.) Si l'on a une fonction $f(x)$ qui ne croît jamais de a à b, on a l'identité :

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

où : $a < \xi < b.$

Supposons que, quand $|z|$ tend vers ∞ par les valeurs $z_1 z_2 \ldots z_n$, on ait : $\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = c$

Comme plus haut, on admet qu'il y ait un nombre limité de directions (de valeurs de φ) pour lesquelles le rapport n'ait pas la limite c, pourvu qu'il reste fini. — Supposons de plus que, quand z croît indéfi-

niment suivant la même loi, on ait :

$$\lim \frac{\psi(z)}{\Pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0.$$

Lemme. Remarquons que le produit : $z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu$

~~tend vers 0~~ reste fini qd z tend vers ∞.

En effet, tant que μ n'atteint pas sa limite inférieure x_0, la partie réelle de z étant positive, $e^{-z(\mu-x_0)}$ tend vers 0.

Il n'y a donc à considérer que l'élément où $\mu = x_0$; mais si nous considérons l'intégrale $\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} z e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu) d\mu$

où ε est infiniment petit, nous pouvons prendre ε assez petit pour que $\varphi(\mu)$ varie toujours dans le même sens, par exemple en décroissant, de x_0 à $(x_0+\varepsilon)$; ~~et~~ cela est ~~possible~~ parce qu'on a supposé que $\varphi(\mu)$ n'avait qu'un nombre fini de maxima et de minima. Nous poserons alors :

$$z e^{-z(\mu-x_0)} = P + iQ$$

et nous appliquerons le théorème de la moyenne aux 2 parties réelles P, Q. L'intégrale se dédoublera : $\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} P f(\mu) d\mu + i\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} Q f(\mu) d\mu$

La 1e est égale à : $f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\eta} P d\mu \qquad 0 < \eta < \varepsilon$

or elle reste finie, car c'est la partie réelle de : $\int_{x_0}^{x+\eta} z e^{-z(\mu-x_0)} d\mu$ où μ et x_0 sont réels.

dont l'intégrale indéfinie est : $-e^{-z(\mu-x_0)}$, et l'intégrale définie :

$1-e^{-z\eta}$ Or $\eta>0$, $-z$ a sa partie réelle positive ; donc $1-e^{-z\eta}>0$. On raisonnerait de même sur la partie imaginaire.

$\int Q\,d\mu$ Donc l'intégrale reste toujours finie :

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu$$ reste fini quand z augmente indéfiniment.

En résumé, nous avons supposé que $|z|$ croissant indéfiniment par une suite de valeurs convenablement choisies $z_1\, z_2 \ldots z_n \ldots$

$$\lim \frac{1}{2}\left[z\mathcal{F}(z) - z\mathcal{F}(-z)\right] = F$$ en général ;

et ~~lim $\psi(-z)$~~, en posant $\mathcal{F}(z) = \dfrac{\psi(z)\,\varphi(z,x)}{\Pi(z)}$,

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\Pi(-z)} = c$$ en général,

$$\lim \frac{\psi(z)}{\Pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0$$ en général,

les termes : « en général » signifiant que pour un nombre limité de directions (d'arguments de z) les quantités précédentes peuvent avoir une autre limite ou n'avoir aucune limite, pourvu qu'elles restent finies ;

et nous avons établi que : $$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu$$

reste fini quand z tend vers l'infini par les valeurs indiquées. Nous avons ainsi obtenu la formule

$$F(x) = \Sigma\, \frac{\psi(\lambda)\,\varphi(\lambda,x)}{\Pi'(\lambda)}$$

qui développe la fonction de la variable réelle x en une série ordonnée

suivant les racines (en nombre infini) de l'équation : $\Pi(z) = 0$.

